Մաթեմատիկա - մարզային փուլ, **11-12-րդ դասարաններ**

Տևողությունը – 180րոպե

1. Գտեք բոլոր a,b բնական թվերը, որոնց դեպքում $\frac{a^{2020}+b}{ab}$ արտահայտության արժեքը բնական թիվ է:

Լուծում: Քանի որ համարիչի առաջին գումարելին բաժանվում է a-ի, հետևաբար պետք է բաժանվի նաև երկրորդ գումարելին, այսինքն $b = a \cdot b_1$: Տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք, որ $\frac{a^{2020}+ab_1}{a^2b_1} = \frac{a^{2019}+b_1}{ab_1} \in N$: Նույն դատողությունը կրկնելով կստանանք, որ $b_1 = ab_2$: Կրկին տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք, որ $\frac{a^{2019}+ab_2}{a^2b_2} = \frac{a^{2018}+b_2}{ab_2} \in N$: Այսպես կրկնելով բազմաթիվ անգամներ կստանանք, որ $b_{2018} = ab_{2019}$ և $\frac{a+b_{2019}}{ab_{2019}} \in N$: Վերջին անգամ կրկնելով նույն դատողությունը կստանանք, որ $b_{2019} = ab_{2020}$ և $\frac{1+b_{2020}}{ab_{2020}} \in N$: Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ $b_{2020} = 1$ և $a = 1$ կամ 2: Առաջին դեպքում ստանում ենք $a = b = 1$, իսկ երկրորդ դեպքում ստանում ենք, որ $a = 2, b = 2^{2020}$:

Պատասխան՝ $(a,b) = (1,1)$ և $(a,b) = (2,2^{2020})$:

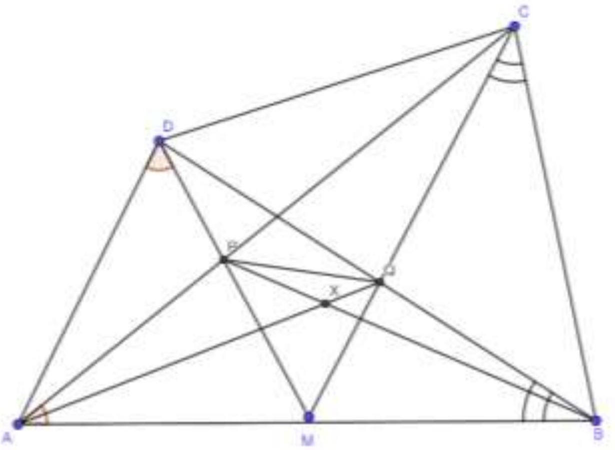
2. Լուծել $x^3 + y^3 = x + y + xy$ հավասարումը ամբողջ թվերով:

Լուծում: Տրված հավասարումը համարժեք է $xy = \frac{(x+y)^3-(x+y)}{3(x+y)+1}$ հավասարմանը: Նշանակենք՝ $x + y = n$, հետևաբար $\frac{n^3-n}{3n+1} \in Z$: Քանի, որ $(3n+1,3) = 1$, ապա $\frac{n^3-n}{3n+1} \in Z \Leftrightarrow \frac{27n^3-27n}{3n+1} \in Z$, հետևաբար $\frac{27n^3-27n}{3n+1} = \frac{27n^3+1-9(3n+1)+8}{3n+1} = 9n^2 - 3n - 8 + \frac{8}{3n+1}$, ուստի $3n + 1 = \pm1; \pm2; \pm4; \pm8 \Rightarrow n \in \{0; 1; -1; -3\}$, հետևաբար հավասարմանը բավարարող թվազույգերն են՝ $(0,0); (1,0); (-1,0); (0,1); (0,-1)$:

3. M –ը $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան AB կողմի միջնակետն է: AC և DM հատվածները հատվում են P կետում, BD և CM հատվածները հատվում են Q կետում, իսկ AQ և BP հատվածները հատվում են X կետում: Հայտնի է, որ AB–ն ADP և CBQ եռանկյունների արտագծած շրջանագծերի համար ընդհանուր շոշափող է : Ապացուցեք, որ $XA = XB$:

Լուծում: Ըստ շոշափողի և հատողի հատկության՝ $MP \cdot MD = MA^2 = MB^2 = MQ \cdot MC$, հետևաբար D, C, Q, P կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\angle DQC = \angle DPC = \angle APM$ և $\angle ADM = \angle PAM \Rightarrow \angle DQC = \angle DAM$, հետևաբար D, A, M, Q կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Տևողությունը – 180րոպե



$\angle MDQ = \angle QAM = \angle XAM$, որտեղից

Նմանապես $\angle MDQ = \angle QAM = \angle XAM$, որտեղից

$\angle PCM = \angle PBM = \angle XBM$, հետևաբար $\angle XAB = \angle XBA$, ուստի $XA = XB$:

4. Տրված n բնական թվի համար դիտարկենք բոլոր չաճող $f:\{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ ֆունկցիաները: Դրանցից մի մասն ունի անշարժ կետ (այսինքն որևէ c բնական թիվ, որի համար $f(c) = c$), իսկ մի մասը չունի: Գտնել անշարժ կետ ունեցող և չունեցող ֆունկցիաների քանակների տարբերությունը:

f ֆունկցիան կոչվում է չաճող, եթե $x \leq y$ թվերի համար տեղի ունի $f(x) \geq f(y)$ առնչությունը:

Լուծում: Նկատենք, որ ցանկացած չաճող ֆունկցիա ունի առավելագույնը մեկ անշարժ կետ: Չաճող ֆունկցիաների ընդհանուր քանակը հավասար է C_{2n-1}^{n-1}: Այժմ հաշվենք անշարժ կետ ունեցող ֆունկցիաների քանակը: Ցանկացած $1 \leq m \leq n$ բնական թվի համար $f(m) = m$ պայմանին բավարարող չաճող ֆունկցիաների քանակը հավասար է $C_{n-1}^{m-1} \cdot C_{n-1}^{n-m}$: Նկատենք, որ այս գումարը ըստ m-ի հավասար է C_{2n-2}^{n-1} : Խնդրի պատասխանը կլինի

$$C_{2n-2}^{n-1} - \left(C_{2n-1}^{n-1} - C_{2n-2}^{n-1}\right) = C_{2n-2}^{n-1} - C_{2n-2}^{n-2}:$$