

Տնողությունը – 180րոպե

1. Լուծել $x^2 - x = 13(y^2 - y)$ հավասարումը, որտեղ x -ը և y -ը փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են:

Լուծում: Պարզ է, որ $x = y = 1$ լուծում է: Քանի, որ $(x, y) = 1$, ապա $\frac{x-1}{y} = \frac{13(y-1)}{x} = p \in \mathbb{N}$: Այդ դեպքում $x - 1 = py$ և $13(y - 1) = px$, հետևաբար $13(y - 1) = p(py + 1) \Leftrightarrow y = \frac{p+13}{13-p^2} \Rightarrow 13 - p^2 > 0 \Rightarrow p = 1; 2; 3 \Rightarrow p = 3, y = 4, x = 13$: Պատ. $(1,1); (13,4)$:

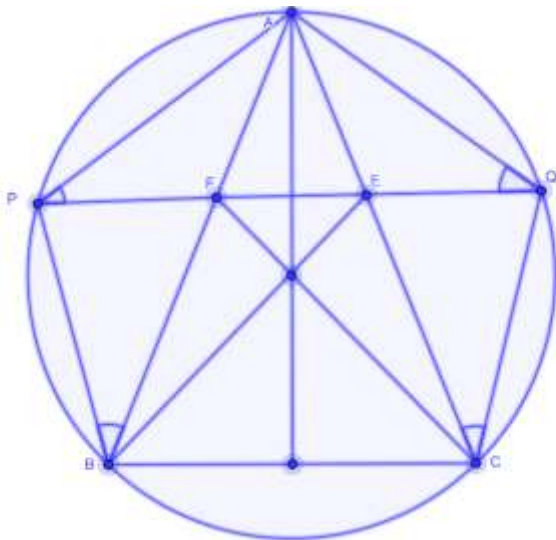
2. Դիցուք $0 < x \leq 2, 0 < y \leq 3$ և $x + y + z = 11$: Գտնել xyz արտահայտության հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում: $xyz = \frac{3x \cdot 2y \cdot z}{6} \leq \frac{(3x+2y+z)^3}{162} = \frac{(2x+y+11)^3}{162} \leq \frac{(4+3+11)^3}{162} = 36$:

Հավասարությունը տեղի ունի, երբ $y = 2, x = 3, z = 6$:

3. Դիցուք ABC եռանկյանն արտագծած է O կենտրոնով ω շրջանագիծը: BO ուղիղը AC հատվածը հատում է E կետում, իսկ CO ուղիղը AB հատվածը հատում է F կետում: FE ուղիղը ω -ն հատում է P և Q կետերում: Հայտնի է, որ $AP = AQ$: Ապացուցել, որ ABC եռանկյունը հավասարասրուն է:

Լուծում: Քանի, որ $AP = AQ$, հետևաբար $\sphericalangle APF = \sphericalangle AQE$, որտեղից $\sphericalangle PBA = \sphericalangle APF = \sphericalangle AQE = \sphericalangle ACQ$:



$\Delta APF \sim \Delta APB \Rightarrow AP^2 = AF \cdot AB$ և $\Delta AEQ \sim \Delta ACQ \Rightarrow AQ^2 = AE \cdot AC$, հետևաբար $AE \cdot AC = AF \cdot AB$, հետևաբար B, E, F, C կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից

Տևողությունը – 180րոպե

$$\angle ABO = \angle ACO = \angle BAO = \angle CAO = \alpha \Rightarrow \angle BOA = \angle COA = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \alpha, \text{ հետևաբար } AB = AC:$$

4. Նարեն ու Լևոնը խաղում են հետևյալ խաղը: Չորս քարտերի վրա հերթով գրում են $x - y$, $x + y$, $x^2 - xy + y^2$, $x^2 + xy + y^2$ արտահայտությունները՝ յուրաքանչյուր քարտի վրա մեկ արտահայտություն: Քարտերը շրջում են այնպես, որ գրված արտահայտությունները չէրևան: Այնուհետև Նարեն վերցնում է մի քարտ, նայում նրա վրա գրված արտահայտությունը և որոշում, թե չորս քարտերից որ երկուսը վերցնի իրեն, իսկ որ երկուսը տա Լևոնին: Դրանից հետո Նարեն ընտրում է x -ից և y -ից որևէ մեկն ու այդ փոփոխականին տալիս որևէ արժեք: Այնուհետև Լևոնը որոշում է, թե ինչ արժեք պետք է ընդունի մյուս փոփոխականը: Դրանից հետո յուրաքանչյուրը հաշվում է իր քարտերի վրա եղած արտահայտությունների արժեքները և հաշվում դրանց արտադրյալը: Հաղթում է այն խաղացողը, ում մոտ ավելի մեծ թիվ կստացվի: Պարզել թե ո՞ր խաղացողն ունի հաղթական մարտավարություն:

Լուծում: Հաղթում է Նարեն:

Եթե Նարեի վերցրած քարտի վրա գրված է $x - y$ կամ $x + y$, ապա նա այդ քարտը տալիս է Լևոնին և իրեն վերցնում երկու այլ քարտ, իսկ հակառակ դեպքում իրեն է պահում այդ քարտը և վերցնում ևս մեկ այլ քարտ: Արդյունքում Նարեն երաշխավորում է, որ իր մոտ չի լինի $(x - y, x + y)$ զույգը: Այժմ դիտարկենք Նարեի մոտի քարտերի հնարավոր տարբերակները (նշանակենք այդ զույգը A-ով):

i) $A = (x - y, x^2 + xy + y^2)$: Այս դեպքում Նարեի մոտ եղած քարտերի արտադրյալը հավասար է $x^3 - y^3$, իսկ Լևոնի մոտիկը՝ $x^3 + y^3$: Այս դեպքում Նարեն y -ի համար ընտրում է որևէ դրական թիվ և ապահովում իր հաղթանակը:

ii) $A = (x - y, x^2 - xy + y^2)$: Այս դեպքում Նարեի մոտ եղած քարտերի արտադրյալը հավասար է $x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3$, իսկ Լևոնի մոտի եղած քարտերի արտադրյալը կլինի $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$: Այդ երկու արտահայտությունների տարբերությունը հավասար է $A - B = -4x^2y - 2y^3 = -2y(y^2 + 2x^2)$: Նարեն կերաշխավորի իր հաղթանակը՝ ընտրելով y -ի համար որևէ բացասական թիվ:

iii) $A = (x + y, x^2 - xy + y^2)$, այս դեպքում $A - B = 2y^3$ և Նարեն ընտրում է y -ի համար որևէ դրական թիվ:

Տնողությունը – 180րոպե

iv) $A = (x + y, x^2 + xy + y^2)$: Այս դեպքում $A - B = 2y(y^2 + 2x^2)$ և Նարեն ընտրում է $y > 0$:

v) Վերջապես, երբ $A = (x^2 - xy + y^2, x^2 + xy + y^2)$ այդ դեպքում $A = x^4 + x^2y^2 + y^4$ և $B = x^2 - y^2$: Եթե Նարեն ընտրի $x > 1$ ապա կունենանք $x^4 > x^2$, որից կստացվի $A > B$: