9-րդ դասարան

1-ին օր

1. **Ապացուցել, որ եթե**

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$$

Ապա կոտորակներից որևէ երկուսը հավասար են 1-ի, իսկ երրորդը հավասար է -1:

Ապացույց: Հավասարությունը գրենք օրինակ հետևյալ տեսքով՝

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1\right)=0$$

$$\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}+\frac{(a-c-b)(a-c+b)}{2ac}+\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}=0$$

որտեղից

$$(a+b-c)\left(\frac{b-c-a}{2bc}+\frac{a-c-b}{2ac}+\frac{a+b+c}{2ab}\right)=0$$

$$(a+b-c)\left(\frac{a(b-c-a)}{2abc}+\frac{b(a-c-b)}{2abc}+\frac{c(a+b+c)}{2abc}\right)=0$$

$$\frac{(a+b-c)}{2abc}(ab-ac-a^2+ab-bc-b^2+ac+ab+c^2)=0$$

Այսպիսով, տրված հավասարությունը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)}{2abc}=0$$

Այստեղից հետևում է, որ փակագծերից մեկնումեկը 0 է: Ենթադրենք a+b-c=0: Այդ դեպքում՝

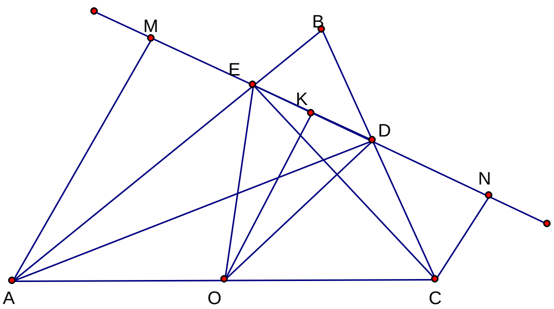
$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1=\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}=0$$

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}-1=\frac{(a-c-b)(a-c+b)}{2ac}=0$$

Այսինքն, առաջին երկու կոտորակները հավասար են 1-ի, հետևաբար՝ երրորդը հավասար կլինի -1:

2. **ABC սուրանկյուն եռանկյան մեջ տարված են AD և CE բարձրությունները: A և C կետերից DE ուղղին տարված ուղղահայացների հիմքերն են համապատասխանաբար M և N կետերը: Ապացուցել, որ ME=DN:**

Լուծում: E և D կետերն ընկած են AC տրամագծով շրջանագծի վրա, հետևաբար OE=OD, որտեղ O-ն AC-ի միջնակետն է: Տանենք ED-ին ուղղահայաց է OK հատվածը: Ակնհայտ է, որ



EK=KD (քանի որ ΔKOE=ΔKOD)։ Հետևաբար OK|| AM և Թալեսի թեորեմի համաձայն ունենք MK=KN, բայց այդ դեպքում, հաշվի առնելով EK=KD հավասարությունը՝ կստանանք ME=DN։

3. Ապացուցել, որ ոչ մի բնական x, y բնական թվերի համար

$$x^{2013} + 2013! = 21^{y}$$

լուծում չունի։

ԼՈՒԾՈՒՄ։ Ենթադրենք թե գոյություն ունի այդպիսի (x, y) թվազույգ։ Հեշտ է նկատել, որ $x \vdots 3$ և $x \vdots 7$։ Դիցուք $x = 3^{a}7^{b}C$, որտեղ $a, b \geq 1$։ 2013!-ը պարզ արտադրիչների վերլուծելիս 3-ի ցուցիչը կլինի հավասար

$$\left[\frac{2013}{3}\right] + \left[\frac{2013}{9}\right] + \left[\frac{2013}{27}\right] + \left[\frac{2013}{81}\right] + \left[\frac{2013}{243}\right] + \left[\frac{2013}{729}\right] = 1002,$$

իսկ 7-ի ցուցիչը

$$\left[\frac{2013}{7}\right] + \left[\frac{2013}{49}\right] + \left[\frac{2013}{343}\right] = 333։$$

Հետևաբար մեր հավասարությունը կարող ենք գրել հետևյալ կերպ

$$3^{2013\,a}7^{2013\,b}C + 3^{1002}7^{333}D = 3^{y}7^{y}$$

Որտեղ $a, b \geq 1$ *և* C *ու* D *3 և 7* հետ փոխադարձաբար պարզ են։ Ակնհայտ է, որ աջ մասը պետք է բաժանվի 3^{1002}, հետևաբար $y \geq 1002$։ Քանի որ հավասարության աջ մասը և ձախ մասի առաջին գումարելին բաժանվում են 7^{1002} վրա իսկ ձախ մասի երկրորդ գումարելին չի բաժանվում, գալիս ենք հակասության։

2-րդ օր

4. Գոյություն ունի՞ արդյոք երկրաչափական պրոգրեսիա, որի անդամներ հանդսանան 1, 2 և 5 թվերը (պարտադիր չէ միմյանց հաջորդող)։

ԼՈւԾՈւՄ։ Ենթադրենք, որ գոյություն ունի երկրաչափական պրոգրեսիա, որի մեջ համապատասխանաբար m-րդ, n-րդ և p-րդ տեղում կանգնած են 1-ը, 2-ը և 5-ը։ Այդ դեպքում՝

$$1 = u_1 q^{m-1}$$
$$2 = u_1 q^{n-1}$$
$$5 = u_1 q^{p-1}։$$

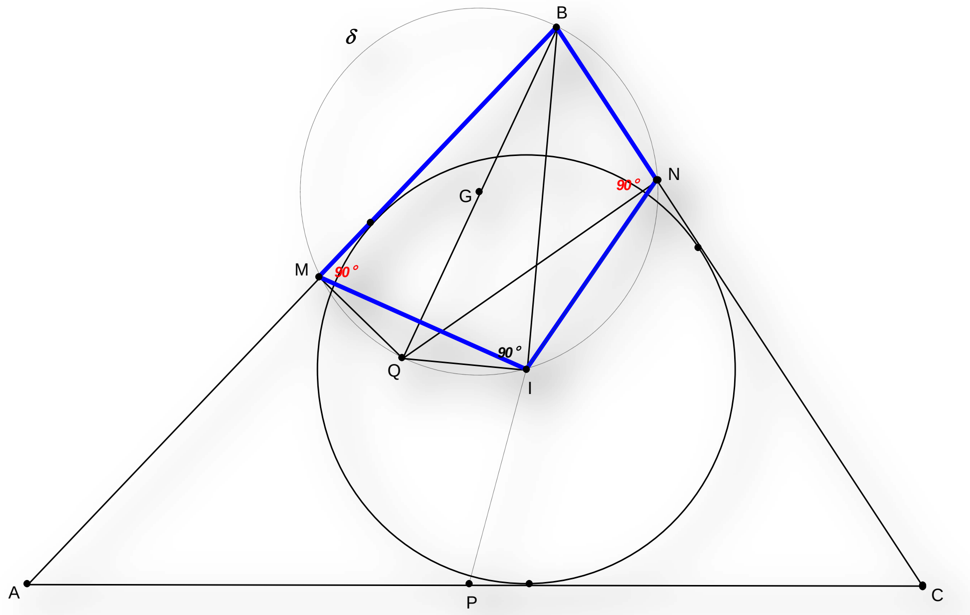
Որտեղից՝

$$2 = q^{n-m}$$
$$5 = q^{p-m}$$

Այս երկու հավասարություններից կհետևի $2^{p-m} = 5^{p-m}$, որն անհնար է, քանի որ հավասարության երկու մասում կանգնած թվերն ունեն տարբեր զույգություն:

5. **Դիցուք P-ն ABC եռանկյան AC կողմին պատկանող կամայական կետ է: AB և BC կողմերի վրա նշված են համապատասխանաբար M և N կետերն այնպես, որ AM=AP և CN=CP: AB և BC կող-մերին՝ M և N կետերով տարված ուղղահայացները հատվում են Q կետում: Ապացուցել, որ <QIB=90^0, որտեղ I-ն ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է:**

Լուծում: Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ գոյություն ունի B, M, Q, N կետերով անցնող շրջանագիծ, որի համար BQ-ն տրամագիծ է: Նշանակենք այդ շրջանագիծը δ-ով: Նկատենք, որ՝ <API=<AMI, <CPI=<CNI, որտեղից՝ <API=<BNI և <AMI=<BNI, հետևաբար BMNI քառանկյունը արտագծելի է, ընդ որում, նրան արտագծած շրջանագիծը համընկնում է δ-ի հետ (քանի որ երեք կետերով անցնում է միակ շրջանագիծ): Մնում է նկատել, որ<QIB անկյունը հենված է BQ տրամագծի վրա:



6. **Ապացուցել, որ$\{1, 2, \ldots 10\}$բնական թվերը կարելի է բաժանել հինգ 5 զույգերի այնպես, որ յուրաքանչյուր զույգի գումարը իրարից տարբեր պարզ թվեր են: Ճշմարի՞տ է արդյոք նմանատիպ պնդումը $\{1, 2, \ldots 20\}$ թվերի համար:**

Առաջին դեպքի համար կարող ենք ընտրել հետևյալ կերպ (1,4), (2,5), (3,8), (6,7), (9,10)

Նկատենք, որ մենք կարող ենք ստանալ միայն հետևյալ պարզ թվերը՝ 3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37, որոնց գումարը հավասար է 195: Քանի որ այդ թվերի քանակը 11-է ապա մենք պետք է ստանանք բոլոր թվերը, բացառությամբ նրանցից մեկից: Քանի որ 1…20 թվերի գումարը հավասար է 210>195, ապա հնարավոր չէ այնպես տրոհել, որ բոլոր զույգերի գումարները լինեն իրարից տարբեր պարզ թվեր: