2014թ. Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի մարզային փուլին առաջադրված խնդիրների լուծումներ:

9-րդ դասարան

1. Հայտնի է, որ x, y և z թվերը բավարարում են

$$x + y + z - 2(xy + yz + zx) + 4xyz = \frac{1}{2}$$

հավասարությանը: Ապացուցել, որ նրանցից գոնե մեկը հավասար է $\frac{1}{2}$:

ԼՈՒԾՈՒՄ:Նկատենք, որ տրված հավասարությունը համարժեք է հետևյալին.

$$(2x-1)(2y-1)(2z-1) = 0$$

Քանի որ արտադրյալը հավասար է զրոյի, հետևաբար արտադրիչներից մեկնումեկը նույնպես պետք է հավասար լինի զրոյի, որից էլ հետևում է խնդրի պահանջը:

2. Ապացուցել, որ ցանկացած ոչ բացասական x, y, z թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$\frac{x+y+z}{2} + \frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{y^2+2y+2} + \frac{1}{z^2+2z+2} \geq \frac{3}{2} :$$

ԼՈՒԾՈՒՄ:Ոչ բացասական a թվերի համար ակնհայտ $a^2(a+1) \geq 0$ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\frac{1}{a^2+2a+2} \geq \frac{1-a}{2}$$

Որտեղից էլ ստացվում է, որ

$$\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{y^2+2y+2} + \frac{1}{z^2+2z+2} \geq \frac{3-(x+y+z)}{2}$$

3. Գտնել 0 թվանշանը չպարունակող 2014 նիշանի թիվ այնպիսին, որ եթե նրան գումարենք իր թվանշանների արտադրյալը, ապա նոր ստացված թվի թվանշանների արտադրյալը կլինի նույնը:

ԼՈՒԾՈՒՄ:Նախ գտնենք այդպիսի եռանիշ թիվ: Նախ գտնենք երկնիշ թիվ, այնպիսին, որ եթե նրա թվանշանների տեղերը փոխենք, ապա թիվը կմեծանա այդ թվանշանների արտադրյալին պատիկ թվով,այսինքն (10a+b)-(10b+a) : ab, կամ որ նույնն է 9(a-b):ab:1Եթե ab

երկնիշ թվին առջևից գրենք9(a-b):ab քանորդը, ապա այդ եռանիշ թիվը կունենա մեր ուզած հատկությունը:
Օրինակ եթե ընտրենք a=1, b=3, ապա կստանանք 613 թիվը:
2014 նիշանի թիվ ստանալու համար մնում է այդ թվին առջևից գրել 2011 հատ 1:
Օրինակ. 11111…1111613,
Այլ օրինակ 11111…1111326

4. Գրատախտակին գրված են $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2013}, \frac{1}{2014}$ թվերը: Յուրաքանչյուր քայլին աշակերտը ջնջում է որևէ երկու x և y թվեր և դրանց փոխարեն գրում $x+y+xy$ թիվը: Որոշել թե ի՞նչ թիվ կլինի գրված գրատախտակին 2013-րդ քայլից հետո:

ԼՈՒԾՈՒՄ:Վերցնենք մեկ այլ գրատախտակ, որի վրա կգրենք առաջին գրատախտակի վրա գրված թվերից մեկով մեծ թվեր, այսինքն $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, ..., \frac{2014}{2013}, \frac{2015}{2014}$ և ամեն քայլի ջնջելով երկու թիվ գրենք նրանց արտադրյալը: Հեշտ է նկատել, որ կատարելով զուգահեռ քայլեր երկու գրատախտակների վրա ամեն քայլում երկրորդ գրատախտակին կգրվի մեկով մեծ թիվ: Հեշտ է հաշվել, որ վերջում երկորդ գրատախտակի վրա կմնա գրված
$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{2014}{2013} \cdot \frac{2015}{2014} = 2015$: Հետևաբար առաջին գրատախտակին լինելու է գրված 2014:
Պատ.՝ 2014:

5. ABC եռանկյան ներսում վերցրել են P կետ այնպես, որ $\angle ABP = \angle ACP$ և $\angle CAP = \angle CBP$: Ապացուցեք, որ P -ն եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Դիցուք AP ուղիղը BC կողմը հատում է E կետում, իսկ CP ուղիղը հատում է AB կողմը F կետում: $\angle$ EPF+ $\angle$ EBF=180^0 $\Rightarrow$ BFPE քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ $\Rightarrow$ $\angle$ FEP= $\angle$ FBP= $\angle$ ACP $\Rightarrow$ AFEC քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ $\Rightarrow$ $\angle$ AEC=$\angle$ AFC $\Rightarrow$ $\angle$ BEP= $\angle$ BFP $\Rightarrow$ $\angle$ BEP=$\angle$ BFP=90^0: