Լուծումներ

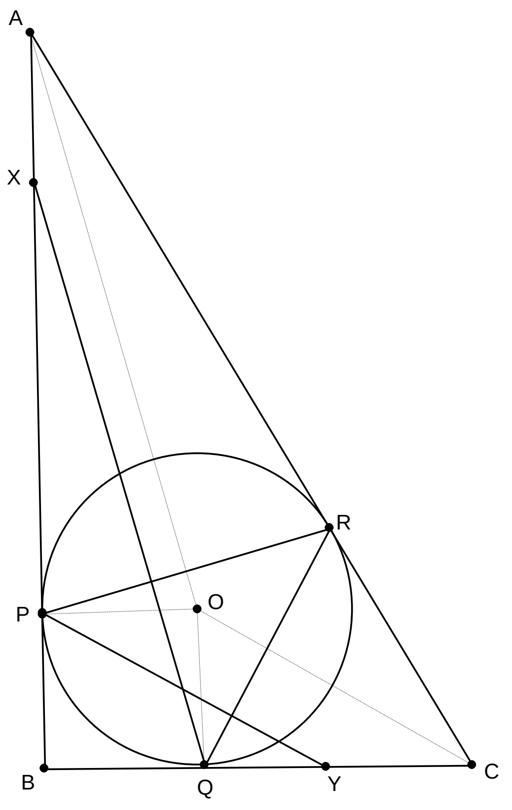
8-րդ դասարան (1 օր)

1. Գտնել $\frac{100!}{6^{100}}$ կոտորակի անկրճատելի ներկայացման հայատարարը:

$$\frac{100!}{6^{100}} = \frac{100!}{2^{100}3^{100}} = \frac{2^{97}3^{48}k}{2^{100}3^{100}} = \frac{k}{2^{3}3^{52}}$$

Որտեղ, k-ն չի բաժանվում 2-ի և 3-ի: Պատ.՝ $2^3 3^{52}$:

2. B ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան ներգծած շրջանագիծը AB, BC և AC կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար P, Q և R կետերում: Q կետով անցնող և PR ուղղին ուղղահայաց ուղիղը AB կողմը հատում է X կետում, P կետով անցնող և QR ուղղին ուղղահայաց ուղիղը CB կողմը հատում է Y կետում: Ապացուցել, որ AX=CY:



Լուծում: Դժվար չէ նկատել, որ՝ OA-ն ուղղահայաց է PR-ին և OC-ն ուղղահայաց է QR-ին: Այստեղից հետևում է, որ QX և OA ուղիղներն իրար զուգահեռ են, մյուս կողմից, քանի որ Q շոշափման կետ է, OQ-ն ուղղահայաց է BC-ին և, հետևաբար, զուգահեռ է AB-ին: Այսպիսով AXQO քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որտեղից AX=QO: Նույն դատողություններով կարելի է համոզվել, որ POCY քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որտեղից CY=PO: Քանի որ PO=QO, ուրեմն՝ AX=CY:

3. Հայտնի է, որ $\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = 14$:

Որոշել, թե ինչի է հավասար $\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ –ը:

<u>Լուծում</u>

Տրված հավասարման երկու կողմը բարձրացնենք քառակուսի.

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 196:$$

Նշանակենք $\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = A$ և երկու կողմը բարձրացնենք խորանարդ.

$$A^3 = \left(\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^3 = \sqrt{x} + 3\sqrt[6]{x} + \frac{3}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 198 + 3A$$

Այսպիսով,

$$A^3 - 3A - 198 = 0:$$

Նկատենք, որ

$$A^3 - 3A - 198 = (A-6)(A^2 + 6A + 33),$$

հետևաբար, միակ լուծումը $A = 6$ -ն է:

8-րդ դասարան   (2 օր)

4. Ապացուցել, որ

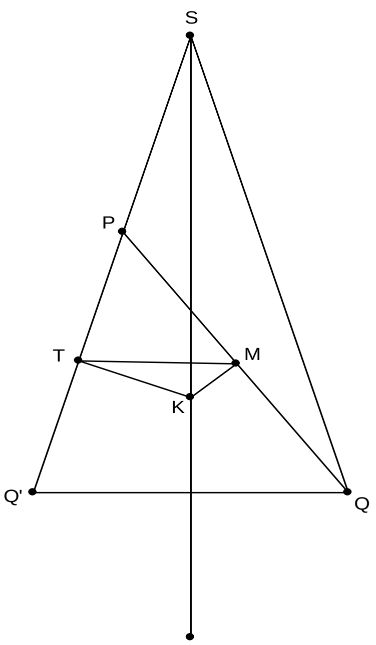
$$\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$$

<u>Լուծում</u>

$$\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{(\sqrt{11-2\sqrt{29}}+\sqrt{5})^2}=$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{\left(\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{11-2\sqrt{29}}\right)^2}=\sqrt{5}+\sqrt{11+2\sqrt{29}+11-2\sqrt{29}+2\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$$



5. S գագաթով անկյան տարբեր կողմերի վրա վերցված են P և Q կետեր, այնպես, որ SP և SQ հատվածները հավասար չեն: PQ հատվածի M միջնակետով տարված է S անկյան կիսորդին ուղղահայաց ուղիղ, որը SP ուղղի հետ հատվում է T կետում: Ապացուցել, որ T կետով անցնող SP-ին ուղղահայաց ուղիղը և M կետով անցնող PQ-ին ուղղահայաց ուղիղը հատվում են S անկյան կիսորդի վրա:

Լուծում: Պարզության համար ընդունենք SP<SQ (տես նկարը): SP ճառագայթի վրա վերցնենք Q' կետը այնպես, որ S Q'=SQ: QSQ' հավասարասրուն եռանկյան մեջ S անկյան կիսորդը ուղղահայաց է QQ'-ին, հետևաբար QQ' զուգահեռ է MT-ին: Թալեսի թեորեմի համաձայն PT=TQ': Դիցուք K-ն T կետով անցնող SP-ին ուղղահայաց և M կետով անցնող PQ-ին ուղղահայաց ուղիղներ հատման կետն է: Պարզ է, որ KT և KM ուղիղները PQ Q' եռանկյան միջնուղղահայացներ են և K-ն դրանց հատման կետն է, այստեղից հետևում է, որ K-ն կպատկանի նաև QQ'-ին տարված միջնուղղահայացին, որն իր հերթին համընկնում է S անկյան կիսորդի հետ:

6. Գտնել $\overline{abc}$ եռանիշ թիվը, եթե $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$:

<u>Լուծում:</u>

$100a+10b+c=10a+b+10b+c+10c+a$, որտեղից՝ $89a=b+10c$: Հետևաբար $a=1, b=9, c=8$: