2014թ. Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի մարզային փուլին առաջադրված խնդիրների լուծումներ:

8-րդ դասարան

1. Հինգ հատ ամբողջ թվերի արտադրյալը հավասար չէ զրոյի: Այդ թվերից յուրաքանչյուրից հանեցին մեկ, սակայն դրանից նրանց արտադրյալը չփոխվեց: Բերել այդպիսի հինգ թվերի օրինակ:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Նայել 10-րդ դասարանի առաջին խնդիրը:

2. Դիցուք 5^{2014} թվի գրառումը բաղկացած է m հատ թվանշաններից, իսկ 2^{2014} թվինը n հատից: Հաշվել $m+n$-ը:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Նկատենք, որ այդ երկու թվերի արտադրյալը հավասար է 10^{2014}: Ունենք, որ

$10^{m-1} < 5^{2014} < 10^{m}$ և $10^{n-1} < 2^{2014} < 10^{n}$:

Այս երկու անհավասարություններից ստացվում է, որ $10^{m+n-2} < 10^{2014} < 10^{m+n}$: Սա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $m+n=2015$:

3. Ապացուցել, որ կամայական բնական $n \ge 2$ թվի համար

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1} > \frac{2}{3}:$$

ԼՈՒԾՈՒՄ:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}\cdot$$

$$\frac{(4-1)(4^2+4+1)}{(4+1)(4^2-4+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

Նկատենք, որ $k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1$,, ինչի շնորհիվ ամեն կոտորակի համարիչի երկրորդ արտադրիչը հավասար է հաջորդ կոտորակի հայտարարի երկրորդ արտադրիչին: Կրճատելով դրանք կստանանք, որ

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(2-1)(3-1)(4-1)\cdot\ldots\cdot(n-1)}{(2+1)(3+1)(n+1)}\cdot(n^2+n+1) =$$

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n+1)}\cdot(n^2+n+1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{(n^2+n+1)}{n(n+1)} > \frac{2}{3}$$

4. Ոչ հավասարասրուն ABC սուրանկյուն եռանկյան ներսում, AC կողի միջնուղղահայացի վրա P վերցրել են կետ այնպես, որ $\angle PAC + \angle PCB + \angle PBA = 90^0$: Ապացուցեք, որ P –ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է

ԼՈՒԾՈՒՄ 1: Դիցուք AC կողի միջնուղղահայացը ուղիղը հատում էE կետում: Այդ դեպքում $\angle$EAC=$\angle$ECA , $\angle$PAC=$\angle$PCA $\Rightarrow$ $\angle$EAP=$\angle$ECP: $\angle$EAP+$\angle$PAC+ $\angle$AEP=90^0 $\Rightarrow$ $\angle$AEP=$\angle$ABP $\Rightarrow$A; B; E; P անցնում է շրջանագիծ $\Rightarrow \angle EAP = \angle EBP = \angle BCP \Rightarrow BP = PC = PA$ $\Rightarrow$ P – ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է:

ԼՈՒԾՈՒՄ 2: Դիցուք C կետում BC հատվածին տարված ուղղահայացը BP ուղղի հետ հատվում է E կետում: Այդ դեպքում $\angle$ABP=$\angle$ACE $\Rightarrow$ABCE քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: $\angle$BCE=90^0 $\Rightarrow$BE-ն տրամագիծ է: P$\in$BE և P$\in$MN$\Rightarrow$P-ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է:

5. Գրատախտակին գրված են $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2013}, \frac{1}{2014}$ թվերը: Յուրաքանչյուր քայլին աշակերտը ջնջում է որևէ երկու x և y թվեր և դրանց փոխարեն գրում $x + y + xy$ թիվը: Որոշել թե ի՞նչ թիվ կլինի գրված գրատախտակին 2013-րդ քայլից հետո:

ԼՈՒԾՈՒՄ:Վերցնենք մեկ այլ գրատախտակ, որի վրա կգրենք առաջին գրատախտակի վրա գրված թվերից մեկով մեծ թվեր, այսինքն $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, ..., \frac{2014}{2013}, \frac{2015}{2014}$ և ամեն քայլի ջնջելով երկու թիվ գրենք նրանց արտադրյալը: Հեշտ է նկատել, որ կատարելով զուգահեռ քայլեր երկու գրատախտակների վրա ամեն քայլում երկրորդ գրատախտակին կգրվի մեկով մեծ թիվ: Հեշտ է հաշվել, որ վերջում երկորդ գրատախտակի վրա կմնա գրված $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{2014}{2013} \cdot \frac{2015}{2014} = 2015$: Հետևաբար առաջին գրատախտակին լինելու է գրված 2014:

Պատ.՝ 2014: