12-րդ դասարան

1-ին օր

1. **Դիցուք a -ն, b -ն և c -ն եռանկյան կողմեր են, իսկ S -ը՝ այդ եռանկյան մակերեսը: Ցույց տալ, որ**

$$ab+bc+ac \geq 4\sqrt{3}\,S:$$

Լուծում

Նախ ապացուցենք այսպիսի անհավասարություն (Ֆինսլեր)

$$2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

Նշանակենք

$$2x=a+b-c>0,$$
$$2y=a+c-b>0,$$
$$2z=b+c-a>0:$$

Ըստ Հերոնի բանաձևի $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, որտեղ $p=\dfrac{a+b+c}{2}=x+y+z$:

Նկատենք, որ

$$p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}=z,$$
$$p-b=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a+c-b}{2}=y,$$
$$p-c=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{a+b-c}{2}=x:$$

Այսպիսով, $S=\sqrt{xyz(x+y+z)}$:

Այս նշականումներից հետո Ֆինսլերի անհավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2 \geq xyz(x+y+z)$$

Իսկ վերջինս էլ համարժեք է հետևյալին.

$$(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2 \geq 0$$

Հիմա ապացուցենք, որ

$$ab+bc+ac \geq 2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2:$$

Վերջինս համարժեք է

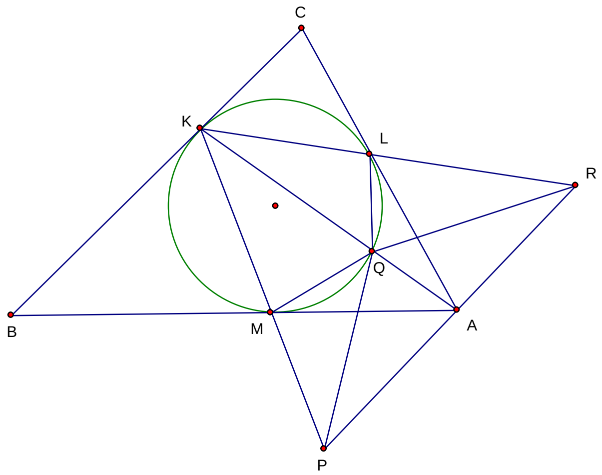
$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac,$$

իսկ վերջինս ճիշտ է, քանի որ

$$ab+bc+ac \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=a^2+b^2+c^2.$$

2. **ABC եռանկյան ներգծած շրջանագիծը այդ եռանկյան կողմերը շոշափում է K, L և M կետերում: Q-ն AK ուղղի և շրջանագծի մյուս հատման կետն է: l-ը A կետով անցնող՝ BC-ին զուգահեռ ուղիղ է: P-ն KM և l, R-ը՝ KL և l ուղիղների հատման կետերն են: Ցույց տալ, որ <PQR=<MQL:**

Լուծում: Շոշափողի և լարի կազմած անկյան մասին թեորեմի համաձայն կարող ենք գրել <BKQ= $\frac{1}{2}\overset{\frown}{KMQ}$ =<KLQ: Այնուհետև նկատենք, որ <BKA=<KAR, որպես BC և l զուգահեռ ուղիղները KA ուղղով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյուններ: Այսպիսով՝



<KLQ=<BKQ=<KAR , հետևաբար ARLQ քառանկյունը արտագծելի է: Նույն կերպ կարելի է համոզվել APMQ քառանկյունը արտագծելի է: Հաշվի առնելով այս քառանկյունների արտագծելի լինելը կարող ենք գրել՝

<PQR=<PQA+<RQA=<PMA+<RLA=<KMB+<KLC ,

որտեղից <PQR=$\frac{\overset{\frown}{KM}+\overset{\frown}{KL}}{2}$=<KQL+<KQM =<MQL:

3. **Ապացուցել, որ ցանկացած բնական n թվի համար գոյություն ունեն զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ $k_0, k_1, \dots, k_n$ մեկից մեծ բնական թվեր այնպիսին, որ $k_0k_1\dots k_n-1$ լինի երկու հաջորդական բնական թվերի արտադրյալ:**

Ապացույցը կատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքով: $n=1$ դեպքում կարող ենք ընտրել $k_0=3, k_1=7$: Դիցուք

$$k_0k_1\dots k_n-1=x_n(x_n+1)$$

և կառուցենք k_{n+1} և x_{n+1}: Ընտրենք $k_{n+1}=x_n^2-x_n+1$ և $x_{n+1}=x_n^2$: Նկատենք որ

$$k_0k_1\dots k_nk_{n+1}-1=(x_n^2+x_n+1)(x_n^2-x_n+1)-1=x_n^2(x_n^2+1):$$

$(k_0k_1\dots k_n, k_{n+1})=(x_n^2+x_n+1, x_n^2-x_n+1)=(x_n^2-x_n+1, 2x_n)=(x_n^2-x_n+1, x_n)=1:$

2-րդ օր

4. ***Լուծել հավասարումը բնական թվերով*** ՝ $m!+2^k=2^n$:

Լուծում :

Նշանակենք ՝ $v_3(m)=\{\max k : k\in N,\ m \vdots 3^k\}$, $f(m)\equiv\left(2^{2\cdot 3^{v_3(m!)-1}}-1\right)$:

Լեմմա :

Եթե $m\ge 9$, *ապա* $2f(m)>m!$:

Ապացույց ։

Ստուգելով համոզվում ենք, որ լեմման ճիշտ է, երբ $m \in \{9,10,11\}$ ։

Ունենք, որ եթե $2f(m) > m!$, *ապա* $2f(m+3) \geq 2[(f(m)+1)^3 - 1] > [f(m)+1]^2[2f(m)] >$

$> m!\,[f(m)+1]^2 = 16^{3^{v_3(m!)-1}} \cdot (m!) \geq (m+1)(m+2)(m+3)m! = (m+3)!$ ։

$16^{3^{v_3(m!)-1}} \geq (m+1)(m+2)(m+3)$, *քանի որ* $v_3\,(m!) = \frac{m-s_3(m)}{2}$ *և* $m \geq 9$ ։

Այստեղ $s_3(m) -$ *ը* $m -$ *ի թվանշանների գումարն է ՝գրված* $3 -$ *ական համակարգում* ։

Հետևաբար $2f(m) > m!$ $, \forall\, m \geq 9, m \in N$. *Լեմման ապացուցված է* ։

Հիմա, եթե $m! = 2^n - 2^k \Rightarrow 2^{n-k} \equiv 1\left(mod\ 3^{v_3(m!)}\right) \Leftrightarrow (n-k) \vdots \left(2 \cdot 3^{v_3(m!)-1}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow m! = 2^n - 2^k \geq 2\left(2^{n-k} - 1\right) \geq 2\left(2^{2 \cdot 3^{v_3(m!)-1}} - 1\right) = 2f(m) > m!$, *երբ* $m \geq 9, m \in N$.

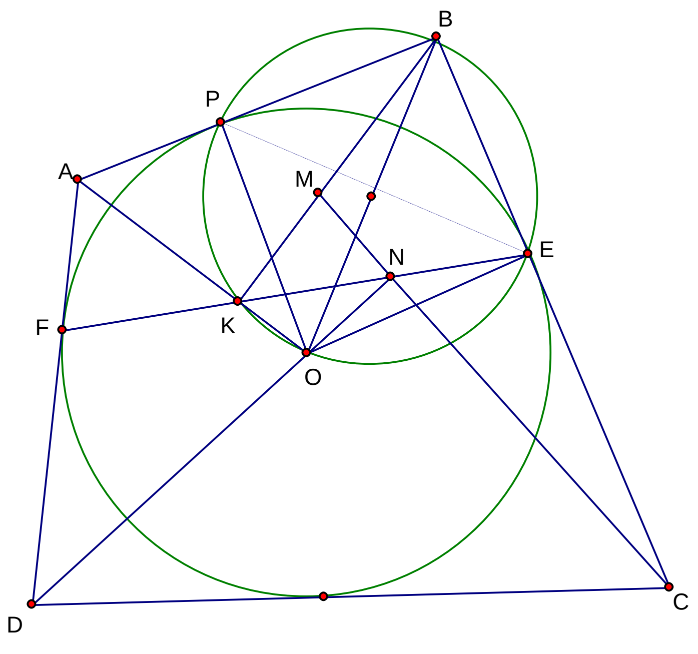
Ստուգմամբ համոզվում ենք, որ $m \neq 6,7,8$.

Վերջնական ստացվում է ՝ $(m, n, k) \in \{(2,2,1); (3,3,1); (4,5,3); (5,7,3)\}$:

5. ABCD քառանկյան ներգծած շրջանագիծը նրա ոչ զուգահեռ BC և AD կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար E և F կետերում: Դիցուք AO ուղիղը և EF հատվածը հատվումեն K կետում, DO ուղիղը և EF հատվածը՝ N կետում, իսկ BK և CN ուղիղները՝ M կետում. Ապացուցել, որ O, K, M և N կետերը գտնվում են նույն շրջանագծի վրա:

Լուծում:

Դիցուք P –ն ABCD –ին ներգծած շրջանագծի՝ AB կողմի հետ ունեցած շոշափման կետն է: P և



E կետերից OB հատվածը երևում է ուղիղ անկյան տակ, նշանակում է այդ կետերը ընկած են OB տրամագծով շրջանագծի վրա: Ցույց տանք, որ այդ շրջանագծի վրա է ընկած նաև K կետը: Իրոք, քանի որ POA անկյունը ABCD –ին ներգծած շրջանագծի POF կենտրոնային անկյան կեսն է, իսկ PEF-ը PF աղեղին հենված ներգծյալ անկյուն է, ապա ∠POA = ∠PEF, հետևաբար ՝∠POK = ∠PEK: Նշանակում է K կետը ընկած է P, O և E կետերով անցնող շրջանագծի վրա, այսինքն OB տրամագծով շրջանագծի վրա: Ապացուցվածից հետևում է, որ ∠BKO = 90°: Անալոգ ձևով կապացուցենք, որ ∠CND = 90°: Նշանակում է, որ K և N կետերից OM հատվածը երևում է ուղիղ անկյան տակ: Հետևաբար O, K, M և N ընկած են OM տրամագծով շրջանագծի վրա:

6. **Ֆուտբոլի մրցաշարին մասնակցում են 20 թիմ: Մրցաշարի ընթացքում ցանկացած թիմ մյուսների հետ պետք է խաղա մեկական անգամ: Մրցաշարի ընթացքում հանդիսատեսներից մեկը նկատում է հետաքրքիր օրինաչափություն. Թիմերի ցանկացած եռյակում կամ բոլորն իրար հետ խաղացել են, կամ խաղացվել է միայն մեկ խաղ: Գտնել թե առնվազն քանի՞ խաղ է արդեն խաղացվել մրցաշարի ընթացքում:**

Որևէ A ակումբի համար դիտարկենք X -ով նշանակենք այն ակումբների բազմությունը, որոնց հետ խաղացել է A թիմը, իսկ Y -ով նշանակենք այն թիմերի բազմությունը, որոնց հետ A-ն չի խաղացել: Քանի որ A-ն խաղացել է այդ բազմության ցանկացած երկու թիմերի հետ, հետևաբար այդ երկու թիմերը խաղացել են միմյանց հետ: Նաև նկատենք, որ քանի որ A-ն չի խաղացել Y բազմության ոչ մի զույգի հետ, հետևաբար Y բազմության բոլոր թիմերը խաղացել են միմյանց հետ: Հետևաբար կարող ենք պնդել, որ $X \cup A$ բազմության բոլոր թիմերը խաղացել են միմյանց միջև բոլոր նախատեսված խաղերը: Նույն պնդումը ճիշտ է նաև Y բազմության համար: Նշանակենք $\#(X \cup A) = m$: Հեշտությամբ կարող ենք հաշվել, որ խաղացվել է ընդհանուր առմամբ

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{(20-m)(19-m)}{2} = (m-10)^2 + 90 \text{ խաղ:}$$

Այդ մեծությունն իր նվազագույն արժեքն ընդունում է 90: