

2014թ. Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի մարզային փուլին առաջադրված խնդիրների լուծումներ:

12-րդ դասարան

1. Ապացուցել, որ ցանկացած a, b, c դրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a+b}{2c} + \frac{b+c}{2a} + \frac{c+a}{2b}:$$

ԼՈՒԾՈՒՄ: Երկու անգամ կիրառելով Կոշիի անհավասարությունը կստանանք.

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2}{3} \geq \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)}{3} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}:$$

Մյուս կողմից

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Վերցնելով վերջին երկու անհավասարությունների կիսագումարը կստանանք խնդրի պնդումը:

2. Առանցքի վրա որոշված ոչ հաստատուն f ֆունկցիան բավարարում է

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{3}f(x) \text{ հավասարմանը: Ապացուցել, որ } f \text{ ֆունկցիան պարբերական է:}$$

ԼՈՒԾՈՒՄ: Մի քանի անգամ կիրառելով խնդրի պայմանը կստանանք հետևյալ շղթան.

$$f(x+1) = \sqrt{3}f(x) - f(x-1) = \sqrt{3}(\sqrt{3}f(x-1) - f(x-2)) - f(x-1) = 2f(x-1) - \sqrt{3}f(x-2) \text{ այսինքն.}$$

$$f(x+1) = 2f(x-1) - \sqrt{3}f(x-2)$$

Կիրառելով այս հավասարությունը, ինչպես նաև խնդրի պայմանը մի-քանի անգամ կստանանք

$$\begin{aligned} f(x+1) &= 2f(x-1) - \sqrt{3}f(x-2) = 4f(x-3) - 2\sqrt{3}f(x-4) - 2\sqrt{3}f(x-4) + 3f(x-5) \\ &= 4\sqrt{3}f(x-4) - 4f(x-5) - 4\sqrt{3}f(x-4) + 3f(x-5) = -f(x-5) \end{aligned}$$

Փաստորոն x -ի ցանկացած արժեքի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$f(x+6) = -f(x), \text{ հետևաբար } f(x+12) = f(x):$$

3. Գտնել բոլոր x, y, z բնական թվերը, որոնք բավարարում են հետևյալ հավասարությանը.

$$3^x + 4^y = 5^z :$$

ԼՈՒԾՈՒՄ:

Հավասարության ձախ մասը 3-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, հետևաբար նույնքան մնացորդ պետք է տա նաև աջ մասը, ինչից կարելի է ենթադրել, որ z -ը գույգ թիվ է:

Հավասարության աջ մասը 4-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, հետևաբար նույնքան մնացորդ պետք է տա նաև ձախ մասը, ինչից կարելի է ենթադրել, որ x -ը գույգ թիվ է:

Այսպիսով ստանում ենք, որ.

$$4^y = 5^z - 3^x = 5^{2z_0} - 3^{2x_0} = (5^{z_0} - 3^{x_0})(5^{z_0} + 3^{x_0})$$

հետևաբար $5^{z_0} - 3^{x_0} = 2^k, 5^{z_0} + 3^{x_0} = 2^l$, որտեղ $k, l \geq 0$ և $k + l = 2y$: Այստեղից ստանում ենք, որ

$$3^{x_0} = \frac{2^l - 2^k}{2} = 2^{l-1} - 2^{k-1}$$

Ձախ մասում գրված է կենտ թիվ, հետևաբար $k = 1$: Ստանում ենք, որ

$$3^{x_0} = 2^{l-1} - 1:$$

Ձախ մասի 3-ի բաժանվելուց հետևում է, որ $l - 1$ գույգ է ($l - 1 = 2s$) և հետևաբար

$$3^{x_0} = (2^s - 1)(2^s + 1):$$

Աջ մասի արտադրիչներից յուրաքանչյուրը 3-ի աստիճան է և նրանց տարբերությունը հավասար է 2, հետևաբար $s = 1$, որտեղից ստացվում է $l = 3$ և վերջապես $x = y = z = 2$:

4. E-ն ABCD քառակուսու AB կողմի կամայական կետ է: ED և AC հատվածները հատվում են P կետում: ED հատվածին P կետում տարված ուղղահայացը BC հատվածը հատում է F կետում:

Ապացուցեք, որ $EF = FC + AE$:

ԼՈՒԾՈՒՄ: BC ճառագայթի վրա վերցնենք K կետ այնպես, որ $CK = AE$: $\triangle CKD = \triangle AED$

$\Rightarrow DE = DK$ և $\angle CKD = \angle AED \Rightarrow EBKD$ քառանկյանը կարելի արտագծել շրջանագիծ,

հետևաբար $\angle EDK = 90^\circ$: $\angle FPD + \angle FCD = 180^\circ \Rightarrow PFCD$ քառանկյանը կարելի արտագծել

շրջանագիծ, հետևաբար $\angle PDF = \angle FCP = \angle FDK = 45^\circ$: Դիցուք EK-ն հատում է FD-ն H կետում:

Այդ դեպքում HD-ն EDK հավասարասրուն եռանկյան կիսորդն է, միջնագիծը և բարձրությունը,

հետևաբար $EH = HK$ և $FH \perp EK \Rightarrow EF = FK = FC + CK = FC + AE$:

5. Կինոթատրոնում առաջին շարքում տոմս գնած բոլոր հանդիսատեսները տեղ զբաղեցրին իրենց շարքում: Պարզվեց, որ բոլոր տեղերը զբաղեցված են, բայց ոչ ոք իր տեղը նստած չէ: Հսկիչը փորձում է նրանց դասավորել իրենց տեղերում հետևյալ կերպ. Յուրաքանչյուր քայլում նա կարող է տեղերով փոխել երկու հարևաննստածներին, սակայն եթե նրանցից որևէ մեկն արդեն իր տեղում է նստած, ապա հրաժարվում է տեղը փոխել: Արդյո՞ք միշտ հնարավոր է այնպես անել, որ ի վերջո բոլորը նստած լինեն իրենց տեղերում:

ԼՈՒԾՈՒՄ:

Հանդիսատեսներին համարակալենք $1, 2, \dots, n$ ձախից աջ ըստ իրենց նստատեղի համարի:

Ապացուցենք, որ հնարավոր է n համարի հանդիսատեսին նստեցնել աջ ծայրում և խնդիրը բերել նույն պայմաններով, բայց ավելի քիչ հանդիսատեսներով դեպքին:

n համարի հանդիսատեսին տեղափոխենք աջ այնքան, քանի դեռ իր աջ հարևանը տեղափոխվելուց հետո չի հայտնվում իր տեղում: Եթե նրան չի հաջողվում k -րդ նստարանից աջ տեղափոխել, ուրեմն $k + 1$ -րդ տեղում նստած է k համարի հանդիսատեսը: Ընտրենք ամենամեծ m թիվն այնպես, որ $k, k + 1, \dots, k + m - 1$ տեղում նստած են $k + 1, k + 2, \dots, k + m$ համարի հանդիսատեսները: Հնարավոր է 2 դեպք:

- 1) $k + m < n$ Այդ դեպքում $k + m + 1$ տեղում նստած կլինի j հանդիսատեսը և $j \neq k + m + 1, j \neq k + m, j \neq k + m - 1, \dots, j \neq k$: Այդ պատճառով նրանք կարող ենք մի-քանի անգամ փոխել ձախ հարևանի հետ այնքան, մինչև նա հայտնվի k -րդ նստատեղում, իսկ n համարի հանդիսատեսը $k + 1$ -րդ: Այսպիսով հաջողվեց n համարի հանդիսատեսին աջ տեղափոխել: Այս պրոցեդուրան կարող ենք կատարել այնքան ժամանակ, քանի դեռ նա չի հայտնվել աջ ծայրում, կամ մինչև հանդիպի երկրորդ դեպքը, երբ $k + m = n$
- 2) $k + m = n$: Նկատենք, որ այս դեպքում n համարի հանդիսատեսին ամեն անգամ աջ հարևանի հետ տեղափոխելուց հետո բոլոր $k, k + 1, \dots, n$ համարի հանդիսատեսները կհայտնվեն իրենց նստատեղում:

Այսպիսով, ամեն դեպքում մեզ հաջողվեց այնպես անել, որ աջ ծայրի մեկ կամ մի-քանի նստատեղերում հայտնվեցին ճիշտ հանդիսատեսները, իսկ մյուսներում ոչ: Խնդիրը բերվեց նույն խնդրին, սակայն ավելի քիչ նստատեղերով և հանդիսատեսներով: Ապացույցն ավարտելու համար մնում է համոզվել, որ $n = 2$ դեպքի համար խնդիրը ճիշտ է: