11-րդ դասարան (1 օր)

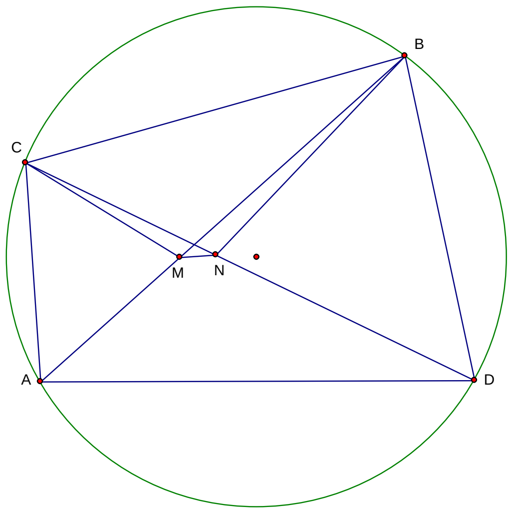
1. Հաշվիր գումարը

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+7i)$$

Լուծում

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+7i)=\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)+\sum_{i=1}^{n}5i=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\big(i(i+1)(i+2)(i+3)+(i-1)i(i+1)(i+2)\big)+5\frac{n(n+1)}{2}=$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)+5\frac{n(n+1)}{2}$$

2. Շրջանագծի մեջ տարված են AB և CD հատվող լարեր: AB հատվածի վրա վերցված է M կետ, այնպիսին, որ AM=AC, իսկ CD հատվածի վրա վերցված է N կետ, այնպիսին, որ DN=DB: Ապացուցել, որ եթե M և N կետերը չեն համընկնում, ապա MN-ը զուգահեռ է AD-ին:



Լուծում: Նկատենք, որ <CAM=<BDN, քանի որ հենված են նույն BC աղեղի վրա: Խնդրի պայմանի համաձայն՝ CAM և BDN եռանկյունները հավասարասրուն են, հետևաբար՝ <ACM=<AMC=180⁰-<CAM=180⁰-<BDN=<NBD=<BND: Այսպիսով, <AMC=<BND, որտեղից՝ <CMB=<BNC: Այստեղից կհետևի, որ BNMC քառանկյունը արտագծելի է, հետևաբար՝ <BCD=<BMN, մյուս կողմից՝ <BCD=<BAD, ուստի՝ <BMN=<BAD, այսինքն՝ MN-ը զուգահեռ է AD-ին:

3. *Դիցուք $a>0$ իրական թիվ է: Կառուցենք $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ իրական թվերի հաջորդականությունը հետևյալ օրենքով՝ $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+\{a_n\}$, $n=1,2,\dots$: Գտնել բոլոր $a>0$ իրական թվերն այնպես, որ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը լինի սահմանափակ :*

**(*Այստեղ* $\{x\}$ *− ով նշանակված է* x *իրական թվի կոտորակային մասը ։ Օրինակ՝*
$\{59,59\} = 0,59$, $\{20,13\} = 0,13$)**

Լուծում ։

Լեմմա 1 ։

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *հաջորդականությունը կլինի սահմանափակ այն և միայն այն դեպքում , երբ* $a \in N$ *կամ* $\{a_{n_0}\} = \frac{1}{2^k}$, *ինչ որ* n_0 *և* k *բնական թվերի համար ։*

Ապացույց ։

Եթե $a \in N$ *ապա ակնհայտորեն պայմանը բավարարված է ։*

Հիմա նկատենք , որ եթե $a > 0$ *− ն ոչ բնական լուծում է , ապա* $\{a\}$ *− ն ևս լուծում է* $=>$ *կարող ենք համարել , որ* $0 < a < 1$ ։

Դիցուք a *− ն* $\frac{1}{2^k}$, $k \in N$, *տեսքի չէ , և* $2^{k_0}a < 1 < 2^{k_0+1}a$, $k_0 \in N_0$ ։ (*)

Հետևաբար՝ $a_1 = a$, $a_2 = 2a$, … , $a_{k_0+2} = 2^{k_0+1}a => a_n > 1$, $\forall n \geq k_0 + 2$, $n \in N$ ։

$s_1 \equiv [a_{k_0+2}] \in N$ (*ամբողջ մասը*) , $a_1^{(1)} \equiv \{a_{k_0+2}\} \in (0,1)$ (*կոտորակային մասը*):

$(*)$ *− ից հետևում է , որ* $1 < 2^{k_0+1}a < 2 => s_1 = 1$ ։

Նույն դատողությունները կիրառենք $\{a_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ *հաջորդականության նկատմամբ , որտեղ վերջինս որոշվում է ճիշտ նույն կանոններով , ինչպես* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *− ը , ուղղակի* a_1 *− ի փոխարեն վերցնում ենք* $a_1^{(1)}$ *− ը ։*

Ունենք , որ $a_{k_0+2} = 1 + a_1^{(1)} => a_{k_0+3} = a_{k_0+2} + \{a_{k_0+2}\} = 1 + a_2^{(1)}$, …

$a_{k_0+m+1} = 1 + a_m^{(1)}$, $m = 1,2,\ldots.$ ։

Հիմա , եթե $a_1^{(1)}$ *− ը նորից* $\frac{1}{2^k}$, $k \in N$ *տեսքի չէ , ապա* $\left\{a_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *հաջորդականությունից կստանանք մի նոր* $\left\{a_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *հաջորդականություն , որը որոշվում է նույն օրենքներով և* $a_{k_0+k_1+m+1} = s_1 + s_2 + a_m^{(2)} = 2 + a_m^{(2)}$, $m = 1,2,\ldots$,

$2^{k_1}a_1^{(1)} < 1 < 2^{k_1+1}a_1^{(1)}$, $k_1 \in N_0$, $s_2 = \left[2^{k_1+1}a_1^{(1)}\right] = 1$, $a_1^{(2)} = \left\{2^{k_1+1}a_1^{(1)}\right\} \in (0,1)$ ։

Պարզ է, որ եթե $a_1^{(n)}$ *− ը* $\frac{1}{2^k}$ $, k \in N$ *տեսքի չէ* $\forall\ n \in N$ *համար, ապա կառաջանան անվերջ թվով* $s_j = 1$ *− եր*, $j = 1,2,\dots$, *այնպես որ* $\forall\ l \in N$ *համար*՝

$a_{(\sum_{i=1}^{l} k_i + m + 1)} = \sum_{i=1}^{l} s_i + a_m^{(l)} = l + a_m^{(l)} > l \Rightarrow a_n \to \infty$, *չի լինում սահմանափակ։*

Հետևաբար որևէ $n \in N$ *համար* $a_1^{(n)}$ *− ը* $\frac{1}{2^k}$ $, k \in N$ *տեսքի է, իսկ* $a_1^{(n)}$ *− ը որևէ* a_{n_0} *− ի կոտորակային մասն է։ Լեմման ապացուցված է։*

Լեմմա 2:

$a_n = 2^{n-1}a + p_n$, *որտեղ* $p_n \in Z$, $n = 1,2,\dots$ ։

Ապացույց։

Հեշտությամբ ստուգվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։

Ըստ լեմմաներ 1 *և* 2 *− ի խնդրի պատասխանի* a *− երը պետք է բավարարեն* $2^{n-1}a + p = t + \frac{1}{2^k}$ *պայմանին*, $n \in N$, $p, t \in Z$, $k \in N$ *կամ էլ* $a \in N$ ։(1)

Նկատենք, որ եթե սկզբնական հաջորդականության որևէ անդամի կոտորա− կային մասը $\frac{1}{2^k}$ $, k \in N$ *տեսքի է, ապա գոյություն ունի այդ հաջորդականության ամբողջ անդամ* $\Rightarrow 2^m a + v = u$, $m, u, v \in Z, m \geq 1 \Rightarrow u > v \Rightarrow a = \frac{u-v}{2^m} \equiv \frac{w}{2^m}$ (2):

Մյուս կողմից $\frac{w}{2^m}$, $w \in N$, $m \in N_0$ *տեսքի բոլոր թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին*։

2-րդ օր

4. $\{a_n\}$ հաջորդականությունը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$a_1 = 1, a_2 = 3; \quad a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n, n \geq 1:$$

Որոշել, թե որ n երի դեպքում a_n-ը կբաժանվի 11-ի:

Լուծում: Նկատենք, որ

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)(a_{n+1} - a_n),$$

երբ $n \geq 1$, հետևաբար

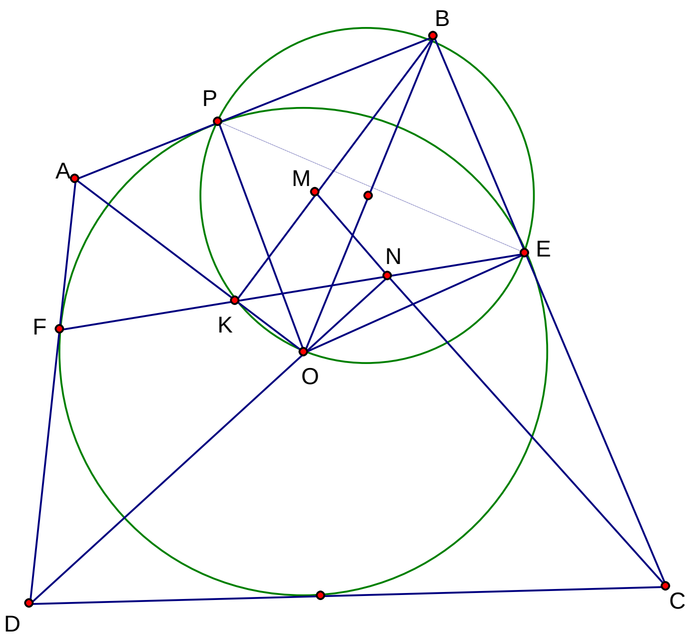
$$a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2) \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot (a_2 - a_1) = (n+2)!$$

Այստեղից ստանում ենք, որ $a_n = n! + (n-1)! + \cdots + 2! + 1!$ *:* Այստեղից էլ հեշտ է ստուգել, որ 11 վրա կբաժանվեն a_4, a_8 և $a_n, n \geq 10$*:*

5. ABCD քառանկյանը ներգծած O կենտրոնով շրջանագիծը նրա ոչ զուգահեռ BC և AD կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար E և Fկետերում: Դիցուք AO ուղիղը և EF հատվածը հատվումեն K կետում, DO ուղիղը և EFհատվածը՝ Nկետում, իսկ BK և CN ուղիղները՝ M կետում. Ապացուցել, որ O, K, M և N կետերը գտնվում են նույն շրջանագծի վրա:

Լուծում:

Դիցուք P –ն ABCD –ին ներգծած շրջանագծի՝ AB կողմի հետ ունեցած շոշափման կետն է: P և E կետերից OB հատվածը երևում է ուղիղ անկյան տակ, նշանակում է այդ կետերը ընկած են OB տրամագծով շրջանագծի վրա: Ցույց տանք, որ այդ շրջանագծի վրա է ընկած նաև K կետը: Իրոք, քանի որ POA անկյունը ABCD –ին ներգծած շրջանագծի POF կենտրոնային անկյան կեսն է, իսկ PEF-ը PF աղեղին հենված ներգծյալ անկյուն է, ապա ∠POA = ∠PEF, հետևաբար ՝ ∠POK = ∠PEK: Նշանակում է K կետը ընկած է P, O և E կետերով անցնող շրջանագծի վրա, այսինքն OB տրամագծով շրջանագծի վրա: Ապացուցվածից հետևում է, որ ∠BKO = 90°: Անալոգ ձևով կապացուցենք, որ ∠CND = 90°: Նշանակում է, որ K և N կետերից OM հատվածը երևում է ուղիղ անկյան տակ: Հետևաբար O, K, M և N ընկած են OM տրամագծով շրջանագծի վրա:



6. *Դիցուք* $n \in N$, $0 \leq x_i \leq 1, \forall\ i \in \{1,2,\dots,n\}$ *և համարում ենք, որ* $x_0 = x_n$ *:*

Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i{}^2 + x_{i-1} - x_{i-1}{}^2) \geq \prod_{i=1}^{n} x_i \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1} + 1)\right)^2$$

Ե՞րբ տեղի ունի հավասարության դեպքը :

Ապացույց: Եթե x_i *թվերից որևէ մեկը 0 է, ապա անհավասարությունը ակնհայտորեն ճիշտ է: Ենթադրենք դրանցից ոչ մեկ 0 չէ:*

Դիցուք $A = \frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i{}^2 + x_{i-1} - x_{i-1}{}^2)}{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ *և* $B = (\prod_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1} + 1))^2$. *Ապացուցենք , որ* $A \geq B$.

Նկատենք, որ $A = \frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i{}^2 + x_{i-1} - x_{i-1}{}^2)}{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i{}^2}{x_{i-1}} + (1 - x_{i-1})\right)(x_{i-1} + (1 - x_{i-1}))\right] = C$:

Համաձայն Կոշի − Բունյակովսկու անհավասարության՝

$$\left(\frac{x_i{}^2}{x_{i-1}} + (1 - x_{i-1})\right)\left(x_{i-1} + (1 - x_{i-1})\right) = \left(\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_{i-1}}}\right)^2 + \left(\sqrt{1 - x_{i-1}}\right)^2\right)(\sqrt{x_{i-1}}^2 + \left(\sqrt{1 - x_{i-1}}\right)^2) \geq$$

$$\geq \frac{x_i}{\sqrt{x_{i-1}}}\sqrt{x_{i-1}} + \sqrt{1 - x_{i-1}}\sqrt{1 - x_{i-1}} = x_i + 1 - x_{i-1}$$

Հետևաբար՝ $C \geq (\prod_{i=1}^{n}(x_i + 1 - x_{i-1}))^2 = B$:

Այսպիսով , $A = C \geq B$:

Պարզ է , որ հավասարության դեպքն է՝ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$: