2014թ. Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի մարզային փուլին առաջադրված խնդիրների լուծումներ:

11-րդ դասարան

1. Ապացուցել, որ ցանկացած a,b,c դրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a+b}{2c}+\frac{b+c}{2a}+\frac{c+a}{2b}:$$

ԼՈՒԾՈՒՄ: Երկու անգամ կիրառելով Կոշիի անհավասարությունը կստանանք.

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2}{3}\geq\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)}{3}\cdot\left(3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}\right)=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}:$$

Մյուս կողմից

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$$

Վերցնելով վերջին երկու անհավասարությունների կիսագումարը կստանանք խնդրի պնդումը:

2. Առանցքի վրա որոշված ոչ հաստատուն f ֆունկցիան բավարարում է $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$ հավասարմանը: Ապացուցել, որ f ֆունկցիան պարբերական է:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Մի քանի անգամ կիրառելով խնդրի պայմանը կստանանք հետևյալ շղթան.

$$f(x+1)=\sqrt{2}f(x)-f(x-1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}f(x-1)-f(x-2))-f(x-1)=f(x-1)-\sqrt{2}f(x-2)=$$
$$\sqrt{2}f(x-2)-f(x-3)-\sqrt{2}f(x-2)=-f(x-3)$$

Փաստորոն x-ի ցանկացած արժեքի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$f(x+4)=-f(x)$, հետևաբար $f(x+8)=f(x)$:

3. Գտնել բոլոր x,y,z բնական թվերը, որոնք բավարարում են հետևյալ հավասարությանը.

$$3^x+4^y=5^z:$$

ԼՈՒԾՈՒՄ:
Հավասարության ձախ մասը 3-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, հետևաբար նույնքան մնացորդ պետք է տա նաև աջ մասը, ինչից կարելի է ենթադրել, որ z-ը զույգ թիվ է:
Հավասարության աջ մասը 4-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, հետևաբար նույնքան մնացորդ պետք է տա նաև ձախ մասը, ինչից կարելի է ենթադրել, որ x-ը զույգ թիվ է:

Այսպիսով ստանում ենք, որ.

$$4^y = 5^z - 3^x = 5^{2z_0} - 3^{2x_0} = (5^{z_0} - 3^{x_0})(5^{z_0} + 3^{x_0})$$

հետևաբար $5^{z_0} - 3^{x_0} = 2^k, 5^{z_0} + 3^{x_0} = 2^l$, որտեղ $k, l \geq 0$ և $k + l = 2y$: Այստեղից ստանում ենք, որ

$$3^{x_0} = \frac{2^l - 2^k}{2} = 2^{l-1} - 2^{k-1}$$

Ձախ մասում գրված է կենտ թիվ, հետևաբար $k = 1$: Ստանում ենք, որ

$$3^{x_0} = 2^{l-1} - 1:$$

Ձախ մասի 3-ի բաժանվելուց հետևում է, որ $l - 1$ զույգ է ($l - 1 = 2s$)և հետևաբար

$$3^{x_0} = (2^s - 1)(2^s + 1):$$

Աջ մասի արտադրիչներից յուրաքանչյուրը 3-ի աստիճան է և նրանց տարբերությունը հավասար է 2, հետևաբար $s = 1$, որտեղից ստացվում է $l = 3$ և վերջապես $x = y = z = 2$:

4. E-ն ABCD քառակուսու AB կողմի կամայական կետ է: ED և AC հատվածները հատվում են P կետում: ED հատվածին P կետում տարված ուղղահայացը BC հատվածը հատում է F կետում: Ապացուցեք, որ EF=FC+AE:

ԼՈՒԾՈՒՄ: BC ճառագայթի վրա վերցնենք K կետ այնպես, որ CK=AE : Δ CKD= Δ AED $\Rightarrow DE = DK$ և $\angle$CKD= $\angle$AED$\Rightarrow$EBKD քառանկյանը կարելի արտագծել շրջանագիծ, հետևաբար $\angle$EDK=90° : $\angle$FPD+$\angle$FCD=180° $\Rightarrow$PFCD քառանկյանը կարելի արտագծել շրջանագիծ, հետևաբար $\angle$PDF=$\angle$FCP=$\angle$FDK=45° : Դիցուք EK–ն հատում է FD-ն H կետում: Այդ դեպքում HD –ն EDK հավասարասրուն եռանկյան կիսորդն է, միջնագիծը և բարձրությունը, հետևաբար EH=HK և FH$\perp$EK$\Rightarrow$EF=FK=FC+CK=FC+AE :

5. Կինոթատրոնում առաջին շարքում տոմս գնած բոլոր հանդիսատեսները տեղ զբաղեցրին իրենց շարքում: Պարզվեց, որ բոլոր տեղերը զբաղեցված են, բայց ոչ ոք իր տեղը նստած չէ: Հսկիչը փորձում է նրանց դասավորել իրենց տեղերում հետևյալ կերպ. Յուրաքանչյուր քայլում նա կարող է տեղերով փոխել երկու հարևաննստածներին, սակայն եթե նրանցից որևէ մեկն արդեն իր տեղում է նստած, ապա հրաժարվում է տեղը փոխել: Արդյո՞ք միշտ հնարավոր է այնպես անել, որ ի վերջ բոլորը նստած լինեն իրենց տեղերում:

ԼՈՒԾՈՒՄ:

Հանդիսատեսներին համարակալենք $1,2,\ldots,n$ձախից աջ ըստ իրենց նստատեղի համարի: Ապացուցենք, որ հնարավոր է n համարի հանդիսատեսին նստեցնել աջ ծայրում և խնդիրը բերել նույն պայմաններով, բայց ավելի քիչ հանդիաստեսներով դեպքին:

n համարի հանդիսատեսին տեղափոխենք աջ այնքան, քանի դեռ իր աջ հարևանը տեղափոխվելուց հետո չի հայտնվում իր տեղում: Եթե նրան չի հաջողվում k-րդ նստարանից աջ տեղափոխել, ուրեմն $k+1$-րդ տեղում նստած է k համարի հանդիսատեսը: Ընտրենք ամենամեծ m թիվն այնպես, որ $k, k+1,\ldots,k+m-1$տեղում նստած են $k+1, k+2, \ldots k+m$ համարի հանդիաստեսները: Հնարավոր է 2 դեպք:

1) $k+m<n$Այդ դեպքում $k+m+1$ տեղում նստած կլինի jհանդիսատեսը և $j \neq k+m+1, j \neq k+m, j \neq k+m-1, \ldots\ j \neq k$: Այդ պատճառով նրանք կարող ենք մի-քանի անգամ փոխել ձախ հարևանի հետ այնքան, մինչև նա հայտնվի k-րդ նստատեղում, իսկ n համարի հանդիաստեսը $k+1$-րդ: Այսպիսով հաջողվեց n համարի հանդիսատեսին աջ տեղափոխել: Այս պրոցեդուրան կարող ենք կատարել այնքան ժամանակ, քանի դեռ նա չի հայտնվել աջ ծայրում, կամ մինչև հանդիպի երկրորդ դեպքը, երբ $k+m=n$
2) $k+m=n$: Նկատենք, որ այս դեպքում n համարի հանդիսատեսին ամեն անգամ աջ հարևանի հետ տեղափոխելուց հետո բոլոր $k, k+1,\ldots,n$համարի հանդիսատեսները կհայտնվեն իրենց նստատեղում:

Այսպիսով, ամեն դեպքում մեզ հաջողվեց այնպես անել, որ աջ ծայրի մեկ կամ մի-քանի նստատեղերում հայտնվեցին ճիշտ հանդիսատեսները, իսկ մյուսներում ոչ: Խնդիրը բերվեց նույն խնդրին, սակայն ավելի քիչ նստատեղերով և հանդիսատեսներով: Ապացույցն ավարտելու համար մնում է համոզվել, որ $n=2$ դեպքի համար խնդիրը ճիշտ է: