10-րդ դասարան

1-ին օր

1. Հաշվել գումարը.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+3}{(i+1)(i+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^i :$$

Լուծում

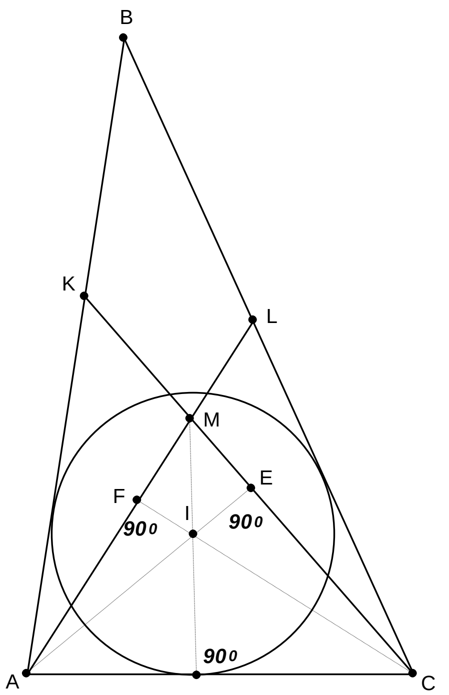
Դժվար չէ նկատել, որ

$$\frac{i+3}{(i+1)(i+2)} = \frac{2}{i+1} - \frac{1}{i+2},$$

հետևաբար

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+3}{(i+1)(i+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}}{i+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}{i+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n(n+2)} :$$

2. ABC եռանկյան մեջ AC-ն ամենափոքր երկարությունն ունեցող կողմն է: AB և BC կողմերի վրա վերցված են համապատասխանաբար K և L կետեր, այնպես, որ KA=AC=CL: Դիցուք M-ը AL և KC հատվածների հատման կետն է, իսկ I-ն ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը: Ապացուցել, որ MI-ն ուղղահայաց է AC-ին:



Լուծում: AI և KC ուղիղների հատման կետը նշանակենք E-ով, իսկ CI և AL ուղիղների հատմանկետը՝ F-ով: Հայտնի է, որ եռանկյան ներգծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է կիսորդների հատման կետում, հետևաբար AE գիծը AKC հավասարասրուն եռան-կյան մեջ հիմքին տարված կիսորդ է, որտեղից կհետևի, որ AE-ն ուղղահայաց է KC-ին: Նույն դատողություններով կարելի է համոզվել, որ CF-ը ուղղահայաց է AL-ին: Այսպիսով AE-ն և CF-ը AMK եռանկյան բարձրություններ են և I-ն դրանց հատման կետն է: Ակնհայտ է, որ MI-ն մյուս բարձրությունն է, ուստի MI-ն ուղղահայաց է AC-ին:

3. ***Գտնել բոլոր*** $\boldsymbol{m}$ **,** $\boldsymbol{n}$ ***բնական թվերն այնպես , որ*** $\mathbf{10^n - 6^m = 4n^2}$:

(Հակոբյան Տիգրան)

Լուծում։

Դիտարկենք 2 *դեպք*։

Դեպք 1 ։ $m \le n$.

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով հեշտորեն կարելի է ապացուցել, *որ*

$10^n - 6^n \ge 4n^2$, $n \in N$, *ընդ որում հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում*, *երբ* $n = 1$ ։

Հետևաբար, $m \le n$ *դեպքում*, *կունենանք* $4n^2 = 10^n - 6^m \ge 10^n - 6^n \ge 4n^2 => n = m = 1.$

Դեպք 2 ։ $m > n$.

Այս դեպքում $4n^2 \vdots 2^n => 1 \le n \le 8$.

Բայց $v_2(4n^2) = v_2(10^n - 6^m) = v_2\big(2^n(5^n - 2^{m-n}3^m)\big) = n => n = 2v_2(n) + 2 => n \vdots 2$.

Փորձելով $n = 2,4,6,8$ *արժեքները*, *կստանանք միակ հնարավոր լուծումը* ՝ $n = 8$, *սակայն հեշտությամբ կարելի է համոզվել*, *որ այն չի բավարարում սկզբնական հավասարմանը*։

Այսպիսով, *հավասարմանն են բավարարում* $m = n = 1$ *արժեքները* ։

$(v_2(n) = \max\{k \in N_0 : n \vdots 2^k\})$

2-րդ օր

4. Ապացուցել, որ

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$$

<u>Լուծում</u>

Պարզ է, որ

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<1+\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{3^3-3}+...+\frac{1}{n^3-n},$$

քանի որ յուրաքանչյուր կոտորակում փոքրանում է հայտարարի արժեքը:

Մյուս կողմից

$$1+\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{3^3-3}+...+\frac{1}{n^3-n}=1+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot (n+1)}:$$

Դժվար չէ ապացուցել, որ

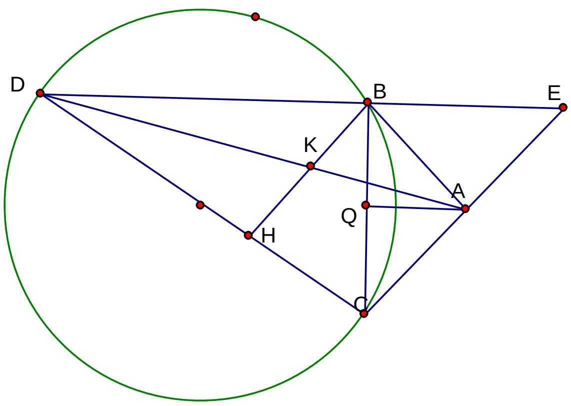
$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{2}{k}+\frac{1}{k+1}\right),$$

հետևաբար

$$1+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=1+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}<\frac{5}{4}:$$

5. Շրջանագծից դուրս գտնվող A կետից այդ շրջանագծին տարված են AB և AC շոշափողներ (B և C շոշափման կետերն են)։ D-ն այդ շրջանագծի վրա ընկած՝ C-ին տրամագծորեն հակառակ կետն է։ H-ը B-ից CD-ին իջեցրած բարձրության հիմքն է։ Ապացուցել, որ AD ուղիղը կիսում է BH հատվածը։

Լուծում: CD-ն C շոշափման կետով տարված տրամագիծ է, հետևաբար այն ուղղահայաց է AC-ին, որտեղից կհետևի, որ BH||AC: DB և AC ուղիղները շարունակենք մինչև հատվելը E կետում: Ունենք <CBD=<CBE=90^0 (<CBD-ն հենված է CD տրամագծի վրա): Քանի որ AB=AC, հետևաբար A-ն ընկած է EBC ուղղանկյուն եռանկյան BC էջի միջնուղղահայացի վրա: Դիցուք Q-ն BC-ի միջնակետն է, ունենք AQ||BE: Թալեսի թեորեմի համաձայն՝ CA=AE: Այսպիսով, DA ուղիղը կիսում է CE հատվածը, հետևաբար, այն կկիսի նաև CE-ին զուգահեռ BH հատվածը:



6. ***Դիցուք*** $\boldsymbol{n\in N}$, $\boldsymbol{0\le x_i\le 1}$,$\forall$ $\boldsymbol{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$ ***և համարումենք***, ***որ*** $\boldsymbol{x_0=x_n}$:

Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^2+x_{i-1}-x_{i-1}^2)\ge\prod_{i=1}^{n}x_i\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}+1)\right)^2$$

Ե՞րբ տեղի ունի հավասարության դեպքը : (Հակոբյան Տիգրան)

Ապացույց: *Եթե x_i թվերից որևէ մեկը 0 է, ապա անհավասարությունը ակնհայտորեն ճիշտ է: Ենթադրենք դրանցից ոչ մեկ 0 չէ:*

Դիցուք $A=\frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i{}^2+x_{i-1}-x_{i-1}{}^2)}{\prod_{i=1}^{n}x_i}$ *և* $B=\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}+1)\right)^2$. *Ապացուցենք , որ* $A\ge B$.

Նկատենք, որ $A=\frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i{}^2+x_{i-1}-x_{i-1}{}^2)}{\prod_{i=1}^{n}x_i}=\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i{}^2}{x_{i-1}}+(1-x_{i-1})\right)(x_{i-1}+(1-x_{i-1}))\right]=C$:

Համաձայն Կոշի – Բունյակովսկու անհավասարության՝

$$\left(\frac{{x_i}^2}{x_{i-1}} + (1 - x_{i-1})\right)\left(x_{i-1} + (1 - x_{i-1})\right) = \left(\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_{i-1}}}\right)^2 + \left(\sqrt{1 - x_{i-1}}\right)^2\right)\left({\sqrt{x_{i-1}}}^2 + \left(\sqrt{1 - x_{i-1}}\right)^2\right) \geq$$

$$\geq \frac{x_i}{\sqrt{x_{i-1}}}\sqrt{x_{i-1}} + \sqrt{1 - x_{i-1}}\sqrt{1 - x_{i-1}} = x_i + 1 - x_{i-1}$$

Հետևաբար՝ $C \geq \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i + 1 - x_{i-1})\right)^2 = B$ ։

Այսպիսով , $A = C \geq B$։

Պարզ է , որ հավասարության դեպքն է՝ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ։