2014թ. Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի մարզային փուլին առաջադրված խնդիրների լուծումներ:

10-րդ դասարան

1. Աշխենին հանձնարարել են ընտրել Nհատ ամբողջ թվերայնպես, որ նրանց արտադրյալը հավասար չլինի զրոյի և եթե այդ բոլոր թվերից հանենք մեկ, ապա դրանից թվերի արտադրյալը չփոխվի: Գտնել թե ո՞ր N-երի համար Աշխենը կարող է կատարել հանձնարարությունը:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Նկատենք, որ $(k+1,-k)$ թվազույգից յուրաքանչյուրից հանենք մեկ, ապա արտադրյալը չի փոխվի: Այսպիսով, եթե $N>3$,ապա կամայական այդպիսի թվազույգեր ընտրելով Աշխենը կարող է խնդիրը բերել $N=2$ կամ $N=3$ դեպքերին: Նայենք այդ դեպքերն առանձին:

1) $N=2$: Այս դեպքում նույնպես Աշխենը կարող է ընտրել ցանկացած $(k+1,-k)$ թվազույգ և այն կբավարարի խնդրի պայմանին:

2) $N=3$: Այս դեպքում կարելի է ընտրել օրինակի համար հետևալ թվերը $(-1,3,4)$: Այն բավարարում է խնդրի պայմաններին, քանի որ $-1{\cdot}3\cdot 4=-2\cdot 2\cdot 3$

Մնաց $N=1$դեպքը, որի դեպքում ակնհայտորեն ընտրություն հնարավոր չէ:

Պատ.՝ $N>1$

2. Ապացուցել, որ ցանկացած ոչ բացասական x,y,z թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.

$$\frac{x+y+z}{2}+\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{y^2+2y+2}+\frac{1}{z^2+2z+2}\geq\frac{3}{2}:$$

ԼՈՒԾՈՒՄ:Ոչ բացասական a թվերի համար ակնհայտ $a^2(a+1)\geq 0$ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\frac{1}{a^2+2a+2}\geq\frac{1-a}{2}$$

Որտեղից էլ ստացվում է, որ

$$\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{y^2+2y+2}+\frac{1}{z^2+2z+2}\geq\frac{3-(x+y+z)}{2}$$

3. Գտնել եռանկյան անկյունների տանգենսները, եթե հայտնի է, որ նրանք բոլորը ամբողջ թվեր են:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Եռանկյան անկյունները նշանակենք$0<\alpha\leq\beta\leq\gamma<\pi$:

$\alpha \le \frac{\pi}{3}$ պայմանից ստանում ենք, որ $tg\alpha \le \sqrt{3}$, հետևաբար $tg\alpha = 1$ և $\alpha = \frac{\pi}{4}$: Մյուս անկյունների համար ստանում ենք, որ $\beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$, այսինքն.

$-1 = tg(\beta + \gamma) = \frac{tg\beta + tg\gamma}{1 - tg\beta tg\gamma}$, որտեղից էլ $(1 - tg\beta)(1 - tg\gamma) = 2$:

Այս հավասարությունից հետևում է, որ կամ արտադրիչները հավասար են 1 և 2, կամ էլ -1 և -2: Երկրորդ դեպքը հնարավոր չէ, ուստի ստանում ենք $tg\beta = 2, tg\gamma = 3$:

Պատ.՝ 1,2,3

4. AB տրամագծով ω կիսաշրջանագիծը հատում է ABC ուղղանկյուն եռանկյան AC ներքնաձիգը և $AB > BC$: Դիցուք P –ն պատկանում է ω –ին և Q –ն պատկանում է AB –ին այնպես, որ $BP = BC$ և $AQ = AP$: Ապացուցեք, որ QC հատվածը ω –ով բաժանվում է հավասար մասերի:

Լուծում:Դիցուք QC –ն հատում է ω -ն K կետում: Քանի, որ
$\angle PBC = \angle BAP \Rightarrow \angle BPC = \angle BCP = \angle AQP = \angle APQ = \alpha$:

$\angle APB = 90^\circ = \angle APQ + \angle QPB = \angle BPC + \angle QPB = 90^\circ$: Հետևաբար Q, B, C, P կետերով անցնում է շրջանագիծ , ընդորում QC –ն այդ շրջանագծի տրամագիծն է: Քանի, որ
$\angle BKP = 180^\circ - \angle BAP = 2\alpha$ և $K \in QC$, հետևաբար K –ն $QBCP$ քառանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Այսինքն՝ $QK = KC$:

5. Թենիսի մրցաշարին մասնակցեցին n թենիսիստներ: Յուրաքանչյուր երկու թենիսիստ իրար հետ խաղացին ուղիղ մեկ անգամ: Մրցաշարի ավարտին պարզվեց, որ i -րդ մասնակիցը ($1 \le i \le n$) հաղթել է x_i անգամ և պարտվել y_i անգամ: Ապացուցել, որ

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 :$$

ԼՈՒԾՈՒՄ:Խնդրի պայմաններիհամաձայն $x_i + y_i = n - 1$: Քանի որ հաղթանակների և պարտությունների ընդհանուր քանակը պետք է լինի նույնը, ստանում ենք, որ
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$: Այս ամենը համադրելով, կստանանք, որ

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) =$$
$$= (x_1 - y_1)(x_1 + y_1) + (x_2 - y_2)(x_2 + y_2) + \ldots + (x_n - y_n)(x_n + y_n) =$$
$$= (n-1)(x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \ldots x_n - y_n) = 0$$