



ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

Պոլիտեխնիկական Միջվարժարանային ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

նվիրված ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյանի 80-ամյա հոբելյանին

Մաթեմատիկա X դասարան լուծումներ

1. Ապացուցել, որ եթե  $\alpha$ -ն,  $\beta$ -ն և  $\gamma$ -ն եռանկյան անկյուններ են, ապա

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos \gamma > \frac{3}{4} :$$

**Լուծում**

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos \gamma &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) - \cos(\alpha + \beta) = 1 + \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \\ &= 1 + \cos(\alpha + \beta) \cdot (\cos(\alpha - \beta) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) > \cos(\alpha + \beta) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \cdot (1 - \cos(\alpha - \beta)) < \cos(\alpha + \beta) \cdot (1 - \cos(\alpha + \beta)) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) &\leq \frac{1}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4\cos^2(\alpha + \beta) - 4\cos(\alpha + \beta) + 1 &\geq 0 \Leftrightarrow (2\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 \geq 0 : \end{aligned}$$

2. Ապացուցել, որ կամայական  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  իրական թվերի համար տեղի ունի.

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca :$$

**Լուծում**

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + bc \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^3}{b} \cdot \frac{b^3}{c} \cdot bc} = 3ab \\ \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ca \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b^3}{c} \cdot \frac{c^3}{a} \cdot ca} = 3bc \\ \frac{c^3}{a} + \frac{a^3}{b} + ab \geq 3 \sqrt[3]{\frac{c^3}{a} \cdot \frac{a^3}{b} \cdot ab} = 3ca \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \left( \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \right) + (ab + bc + ca) &\geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} &\geq ab + bc + ac : \end{aligned}$$

Հավասարությունը կլինի, երբ  $a = b = c$  :



**ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ**

3. Տասանիշ թիվը անվանենք հետաքրքիր, եթե նրա բոլոր թվանշանները տարբեր են և այն բաժանվում է 1111-ի: Գտնել հետաքրքիր թվերի քանակը:

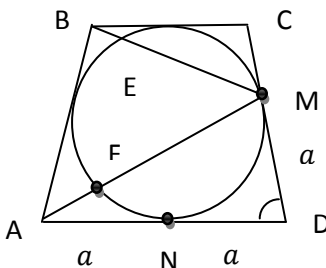
**Լուծում**

Քանի որ տասանիշ թվի թվանշանները տարբեր են, իսկ այդ թվանշանների գումարը 45 է, այդ թվերը բաժանվում են 9-ի: Իսկ քանի որ նրանք բաժանվում են 1111-ի, ապա նրանք պետք է բաժանվեն նաև 99999-ի: Դիցուք  $a_0, a_1, \dots, a_9$  տասանիշ թիվն է: Հեշտ է նկատել, որ  $a_0 + a_5 = 9, a_1 + a_6 = 9, a_2 + a_7 = 9, a_3 + a_8 = 9, a_4 + a_9 = 9$ : Այսինքն հետքերի թվի վերջին հինգ թվանշանները կարելի է որոշել առաջին հինգ թվանշաններից, որոնք կարելի է ընտրել կամայականորեն, հաշվի առնելով միայն, որ նրանց ոչ մի երկուսի գումարը 9 չէ և  $a_9$ -ը ևս հավասար չէ զրոյի: Հետևաբար հետաքրքիր թվերի քանակը կլինի՝  $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$ :

4.  $ABCD$  հավասարասրուն սեղանին ներգծված շրջանագիծը  $CD$  սրունքը շոշափում է  $M$  կետում:  $AM$  հատվածը շրջանագիծը հատում է  $F$  կետում, իսկ  $BM$  հատվածը՝  $E$  կետում: Ապացուցել, որ

$$\frac{AM}{AF} + \frac{BM}{BE} = 10 :$$

**Լուծում**



$$AB = CD, \quad AN = ND = a, \quad AM = y : AF = x$$

$$\triangle ADM - \text{ից } y^2 = 5a^2 - 4a^2 \cos \alpha = a^2(5 - 4 \cos \alpha)$$

$$a^2 = xy, \quad \frac{AM}{AF} = \frac{y}{x} = \frac{y^2}{xy}$$

$$\frac{AM}{AF} = \frac{y^2}{xy} = \frac{a^2(5 - 4 \cos \alpha)}{a^2} = 5 - 4 \cos \alpha$$

$$\triangle BCM - \text{ից } \Rightarrow \frac{BM}{BE} = 5 + 4 \cos \alpha \Rightarrow \frac{AM}{AF} + \frac{BM}{BE} = 10 :$$

5. Որոշել  $80^{80}$  թիվը 13-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

**Լուծում**

$80^{80} = (6 \cdot 13 + 2)^{80} \Rightarrow$  բացելուց հետո բացի  $2^{80}$ -ից մնացածները կբաժանվեն 13-ի: Խնդիրը բերվեց  $2^{80}$ -ը 13-ի բաժանվելուց մնացորդը գտնելուն:  $2^{80} = 16^{20} \Rightarrow \Rightarrow (13 + 3)^{20} \Rightarrow$  պետք է գտնել  $3^{20}$ -ը 13-ի բաժանելուց մնացորդը:  $3^{20} = 81^5 \Rightarrow 81^5 = (6 \cdot 13 + 3)^5 \Rightarrow$  գտնենք  $3^5 = 243$ -ը 13-ի բաժանելուց մնացորդը, որը ստացվում է 9:



**ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ**

**Պոլիտեխնիկական Միջվարժարանային ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ**

նվիրված ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյանի 80-ամյա հոբելյանին

**Մաթեմատիկա XI դասարան լուծումներ**

1. Գտնել  $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

ա)  $f(80) = 80$ ,

բ)  $f(x) \cdot f(y) + f\left(\frac{80}{x}\right) \cdot f\left(\frac{80}{y}\right) = 160 \cdot f(xy)$  :

**Լուծում**

Տեղադրենք  $x = y = 1$

$$f^2(1) + f^2(80) = 160f(1)$$

$$f^2(1) + 80^2 - 160f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 80$$

Տեղադրենք  $y = 1$

$$f(x) \cdot f(80) + f\left(\frac{80}{x}\right) \cdot f(80) = 160 \cdot f(x)$$

$$f(x) \cdot 80 + f\left(\frac{80}{x}\right) \cdot 80 = 160 \cdot f(x)$$

$$f\left(\frac{80}{x}\right) = f(x)$$

Տեղադրենք  $y = \frac{80}{x}$  կստանանք

$$f(x) \cdot f\left(\frac{80}{x}\right) + f\left(\frac{80}{x}\right) \cdot f(x) = 160 \cdot f(80)$$

$$2f^2(x) = 160 \cdot 80 \Rightarrow f^2(x) = 80^2:$$

2. Ապացուցել, որ  $\forall a > b > 0$  թվերի համար

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2} :$$

**Լուծում**

$$\sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} - 1}{\ln \frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} + 1}{2}$$

Նշանակենք  $\frac{a}{b} = x$ , կստանանք

$$\frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}, \quad x \in (1, +\infty)$$



**ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ**

Դիտարկենք  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} - \ln x$  ֆունկցիան.

$$f'(x) = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} > 0, \text{ երբ } x \in (1, +\infty) :$$

Նշանակում է  $f(x)$  աճող է  $(1, +\infty)$  միջակայքում:

$$f(x) > f(1) \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} - \ln x > 0:$$

Նույն ձևով ապացուցվում է անհավասարության մյուս մասը:

3. Տասանիշ թիվը անվանենք հետաքրքիր, եթե նրա բոլոր թվանշանները տարբեր են և այն բաժանվում է 11111-ի: Գտնել հետաքրքիր թվերի քանակը:

**Լուծում**

Քանի որ տասանիշ թվի թվանշանները տարբեր են, իսկ այդ թվանշանների գումարը 45 է, այդ թվերը բաժանվում են 9-ի: Իսկ քանի որ նրանք բաժանվում են 11111-ի, ապա նրանք պետք է բաժանվեն նաև 99999-ի: Դիցուք  $a_0, a_1, \dots, a_9$  տասանիշ թիվն է: Հեշտ է նկատել, որ  $a_0 + a_5 = 9, a_1 + a_6 = 9, a_2 + a_7 = 9, a_3 + a_8 = 9, a_4 + a_9 = 9$ : Այսինքն հետքերի թվի վերջին հինգ թվանշանները կարելի է որոշել առաջին հինգ թվանշաններից, որոնք կարելի է ընտրել կամայականորեն, հաշվի առնելով միայն, որ նրանց ոչ մի երկուսի գումարը 9 չէ և  $a_9$ -ը ևս հավասար չէ զրոյի: Հետևաբար հետաքրքիր թվերի քանակը կլինի՝  $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$ :

4.  $A(9; -2; 2), B(1; 6; 2)$  և  $C(-7; -2; 2)$  կետերը գտնվում են կոնի հիմքի շրջանագծի վրա, իսկ  $M(4; \sqrt{7} - 2; 5)$  կետը՝ նրա ծնորդի վրա: Գտե՛ք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

**Լուծում**

$A, B$  և  $C$  կետերը  $z = 2$  հարթության մեջ գտնվում են  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 64$  շրջանագծի վրա:  $M$  կետի պրոյեկցիան  $z = 2$  հարթության վրա կլինի  $M_1(4, \sqrt{7} - 2, 3)$  կետը, որը կոնի հիմքի կենտրոնից ունի 4 միավոր հեռավորություն: Կոնի բարձրությունը հավասար կլինի 6-ի, իսկ ծնորդը՝ 10-ի:

Պատ՝ 80

5. Դիցուք  $a$  և  $b \in \mathbb{N}$ , ընդ որում  $a + 77b$  թիվը բաժանվում է 79-ի, իսկ  $(a + 79b)$  -ն՝ 77-ի: Որոշել  $(a + b)$  -ի փոքրագույն արժեքը:

**Լուծում**

$$\begin{aligned} a + 77b &= a - 2b + 79b \Rightarrow (a - 2b) : 79 \Leftrightarrow (39a - 78b) : 79 \Leftrightarrow (39a + b) : 79 \\ (a + 79b) : 77 &\Leftrightarrow (a + 2b) : 77 \Leftrightarrow (39a + 78b) : 77 \Leftrightarrow (39a + b) : 77 \\ (77, 79) &= 1 \Rightarrow (39a + b) : 79 \cdot 77 \Rightarrow 39a + b = 79 \cdot 77k \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ  
(ՀԻՄՆԱԴԻՐԱՄ)

ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 39a + 39b = 79 \cdot 77k + 38b = (78^2 - 1)k + 38b = (78^2 - 39)k + 38(k + b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (k + b) : 39 \Rightarrow b + k \geq 39 \Rightarrow 39a + 39b \geq (78^2 - 39) + 38 \cdot 39 \Rightarrow a + b \geq 156 - 1 + 38 = 193 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} b = 38 & \text{բազ. է} \\ a = 155 & \begin{array}{l} a + 77b = 155 - 2 \cdot 38 + 79 \cdot 38 = 79 \cdot 39 \\ a + 79b = 155 + 2 \cdot 38 + 77 \cdot 38 = 77 \cdot 41 \end{array} \end{array}$$



ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

Պոլիտեխնիկական Միջվարժարանային ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

նվիրված ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյանի 80-ամյա հոբելյանին

Մաթեմատիկա XII դասարան լուծումներ

1. Գտնել  $x = 0$  կետում անընդհատ այն ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին.

$$80 \cdot f(80 \cdot x) = f(x) + 80 \cdot x :$$

**Լուծում**

$$x = 0, \quad nf(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$x$ -ի փոխարեն տեղադրենք  $\frac{x}{n}$

$$nf(x) = f\left(\frac{x}{n}\right) + x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}$$

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{n^2}f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^3} + \frac{x}{n}$$

բայց

$$f\left(\frac{x}{n^2}\right) = \frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^3}$$

Այնպես որ

$$f(x) = \frac{1}{n^3}f\left(\frac{x}{n^3}\right) + \frac{x}{n^4} + \frac{x}{n^3} + \frac{1}{n}:$$

Ինդուկցիայով

$$f(x) = \frac{1}{n^k}f\left(\frac{x}{n^k}\right) + \frac{x}{n^{2k-1}} + \dots + \frac{x}{n}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{n^{2k-1}} + \dots + \frac{x}{n} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{nx}{n^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{nx}{x^2 - 1} :$$

2. Ապացուցել, որ կամայական  $\forall n \geq 2$  բնական թվերի համար

$$1 + \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} < n + 1 :$$

**Լուծում**

Նշանակենք  $S_n = 1 + \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$  : Պետք է ապացուցենք, որ  $S_n < n + 1$  :



**ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ**

$$\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}{k-1}} \text{ հատ } < \frac{1}{k} \left( \frac{k+1}{k} + k-1 \right) = 1 + \frac{1}{k^2}$$

$$S_n < 1 + \left( 1 + \frac{1}{2^2} \right) + \dots + \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) = n + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< n + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = n + \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) =$$

$$= n + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) < n + 1$$

3. Տասանիշ թիվը անվանենք հետաքրքիր, եթե նրա բոլոր թվանշանները տարբեր են և այն բաժանվում է 11111-ի: Գտնել հետաքրքիր թվերի քանակը:

**Լուծում**

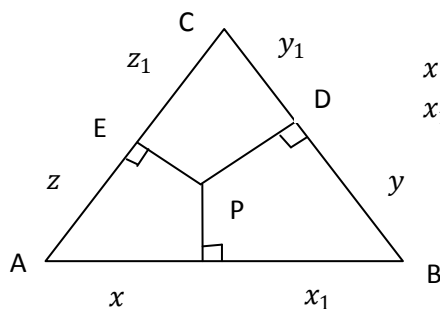
Քանի որ տասանիշ թվի թվանշանները տարբեր են, իսկ այդ թվանշանների գումարը 45 է, այդ թվերը բաժանվում են 9-ի: Իսկ քանի որ նրանք բաժանվում են 11111-ի, ապա նրանք պետք է բաժանվեն նաև 99999-ի: Դիցուք  $a_0, a_1, \dots, a_9$  տասանիշ թիվն է: Հեշտ է նկատել, որ  $a_0 + a_5 = 9, a_1 + a_6 = 9, a_2 + a_7 = 9, a_3 + a_8 = 9, a_4 + a_9 = 9$ : Այսինքն հետքերի թվի վերջին հինգ թվանշանները կարելի է որոշել առաջին հինգ թվանշաններից, որոնք կարելի է ընտրել կամայականորեն, հաշվի առնելով միայն, որ նրանց ոչ մի երկուսի գումարը 9 չէ և  $a_9$ -ը ևս հավասար չէ զրոյի: Հետևաբար հետաքրքիր թվերի քանակը կլինի՝  $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$ :

4.  $ABC$  հավասարակողմ եռանկյան ներքին կամայական  $P$  կետից  $BC, CA$  և  $AB$  կողմերին տարված են համապատասխանաբար  $PD, PE$  և  $PF$  ուղղահայացները: Ապացուցել, որ

$$\frac{BD + CE + AF}{PD + PE + PF} = \sqrt{3} :$$

**Լուծում**

Նշանակենք  $AF = x, BD = y, CE = z, BF = x_1, CD = y_1, AE = z_1$



Օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից, կստանանք.

$$x^2 + y^2 + z^2 = AP^2 - PF^2 + BP^2 - PD^2 + CP^2 - PE^2 \quad (1)$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = BP^2 - PF^2 + CP^2 - PD^2 + AP^2 - PE^2 \quad (2)$$

$$(1) -ից \text{ և } (2) -ից \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 :$$

Մյուս կողմից՝

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a - x_1)^2 + (a - y_1)^2 + (a - z_1)^2 =$$

$$= 3a^2 - 2a(x_1 + y_1 + z_1) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \Rightarrow$$



ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

$$x_1 + y_1 + z_1 = \frac{3a}{2} = x + y + z$$

Քանի որ

$$PF + PD + PE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ուստի

$$\frac{x + y + z}{PF + PD + PE} = \sqrt{3} :$$

5. Դիցուք  $a$  և  $b \in N$ , ընդ որում  $a + 77b$  թիվը բաժանվում է 79-ի, իսկ  $(a + 79b)$  -ն՝ 77-ի: Որոշել  $(a + b)$  -ի փոքրագույն արժեքը:

**Լուծում**

$$\begin{aligned} a + 77b = a - 2b + 79b &\Rightarrow (a - 2b) : 79 \Leftrightarrow (39a - 78b) : 79 \Leftrightarrow (39a + b) : 79 \\ (a + 79b) : 77 &\Leftrightarrow (a + 2b) : 77 \Leftrightarrow (39a + 78b) : 77 \Leftrightarrow (39a + b) : 77 \\ (77, 79) = 1 &\Rightarrow (39a + b) : 79 \cdot 77 \Rightarrow 39a + b = 79 \cdot 77k \quad k \in N \\ \Rightarrow 39a + 39b = 79 \cdot 77k + 38b &= (78^2 - 1)k + 38b = (78^2 - 39)k + 38(k + b) \Rightarrow \\ \Rightarrow (k + b) : 39 &\Rightarrow b + k \geq 39 \Rightarrow 39a + 39b \geq (78^2 - 39) + 38 \cdot 39 \Rightarrow \\ a + b &\geq 156 - 1 + 38 = 193 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} b = 38 & \text{բավ է} \\ a = 155 & \begin{aligned} a + 77b &= 155 - 2 \cdot 38 + 79 \cdot 38 = 79 \cdot 39 \\ a + 79b &= 155 + 2 \cdot 38 + 77 \cdot 38 = 77 \cdot 41 \end{aligned} \end{array}$$