ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ)

ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

Պոլիտեխնիկական Միջվարժարանային ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

նվիրված ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյանի 80-ամյա հոբելյանին

Մաթեմատիկա X դասարան լուծումներ

1. Ապացուցել, որ եթե α-ն, β-ն և γ-ն եռանկյան անկյուններ են, ապա

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos\gamma > \frac{3}{4} :$$

Լուծում

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos\gamma = \frac{1+cos2\alpha}{2} + \frac{1+cos2\beta}{2} + cos\big(180^0 - (\alpha+\beta)\big) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(cos2\alpha + cos2\beta) - cos(\alpha+\beta) = 1 + cos(\alpha+\beta)\cdot cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta) =$$

$$= 1 + cos(\alpha+\beta)\cdot(cos(\alpha-\beta) - 1)$$

$$cos(\alpha-\beta) > cos(\alpha+\beta) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow cos(\alpha+\beta)\cdot\big(1 - cos(\alpha-\beta)\big) < cos(\alpha+\beta)\cdot\big(1 - cos(\alpha+\beta)\big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow cos(\alpha+\beta) - cos^2(\alpha+\beta) \le \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4cos^2(\alpha+\beta) - 4cos(\alpha+\beta) + 1 \ge 0 \iff (2cos(\alpha+\beta) - 1)^2 \ge 0 :$$

2. Ապացուցել, որ կամայական $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ իրական թվերի համար տեղի ունի.

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge ab + bc + ca :$$

Լուծում

$$\begin{cases} \dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{c} + bc \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{b}\cdot\dfrac{b^3}{c}\cdot bc} = 3ab \\ \dfrac{b^3}{c} + \dfrac{c^3}{a} + ca \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{b^3}{c}\cdot\dfrac{c^3}{a}\cdot ca} = 3bc \\ \dfrac{c^3}{a} + \dfrac{a^3}{b} + ab \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{c^3}{a}\cdot\dfrac{a^3}{b}\cdot ab} = 3ca \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + (ab + bc + ca) \ge 3(ab + bc + ca) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge ab + bc + ac :$$

Հավասարությունը կլինի, երբ $a = b = c$ ։

3. Տասանիշ թիվը անվանենք հետաքրքիր, եթե նրա բոլոր թվանշանները տարբեր են և այն բաժանվում է 11111-ի: Գտնել հետաքրքիր թվերի քանակը:

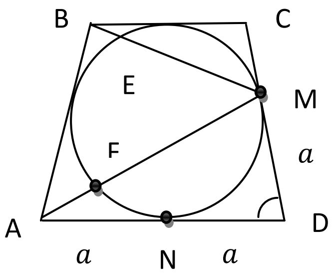
Լուծում

Քանի որ տասանիշ թվի թվանշանները տարբեր են, իսկ այդ թվանշանների գումարը 45 է, այդ թվերը բաժանվում են 9-ի: Իսկ քանի որ նրանք բաժանվում են 11111-ի, ապա նրանք պետք է բաժանվեն նաև 99999-ի: Դիցուք $a_0, a_1, \cdots, a_9$ տասանիշ թիվն է: Հեշտ է նկատել, որ $a_0 + a_5 = 9$, $a_1 + a_6 = 9$, $a_2 + a_7 = 9$, $a_3 + a_8 = 9$, $a_4 + a_9 = 9$: Այսինքն հետքրքիր թվի վերջին հինգ թվանշանները կարելի է որոշել առաջին հինգ թվանշաններից, որոնք կարելի է ընտրել կամայականորեն, հաշվի առնելով միայն, որ նրանց ոչ մի երկուսի գումարը 9 չէ և a_9-ը ևս հավասար չէ զրոյի: Հետևաբար հետաքրքիր թվերի քանակը կլինի՝ $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$:

4. $ABCD$ հավասարասրուն սեղանին ներգծված շրջանագիծը CD սրունքը շոշափում է M կետում: AM հատվածը շրջանագիծը հատում է F կետում, իսկ BM հատվածը՝ E կետում: Ապացուցել, որ

$$\frac{AM}{AF} + \frac{BM}{BE} = 10 :$$

Լուծում



$AB = CD\,,\quad AN = ND = a\,,\ AM = y : AF = x$

ΔADM – ից $y^2 = 5a^2 - 4a^2\cos\alpha = a^2(5 - 4\cos\alpha)$

$$a^2 = xy,\quad \frac{AM}{AF} = \frac{y}{x} = \frac{y^2}{xy}$$

$$\frac{AM}{AF} = \frac{y^2}{xy} = \frac{a^2(5 - 4\cos\alpha)}{a^2} = 5 - 4\cos\alpha$$

$$\Delta BCM - \text{ից} \quad \Rightarrow \frac{BM}{BE} = 5 + 4\cos\alpha \Rightarrow \frac{AM}{AF} + \frac{BM}{BE} = 10 :$$

5. Որոշել 80^{80} թիվը 13-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

Լուծում

$80^{80} = (6 \cdot 13 + 2)^{80} \Longrightarrow$ բացելուց հետո բացի 2^{80}-ից մնացածները կբաժանվեն 13-ի: Խնդիրը բերվեց 2^{80}-ը 13-ի բաժանվելուց մնացորդը գտնելուն: $2^{80} = 16^{20} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (13 + 3)^{20} \Longrightarrow$ պետք է գտնել 3^{20}-ը 13-ի բաժանելուց մնացորդը: $3^{20} = 81^5 \Longrightarrow$
$81^5 = (6 \cdot 13 + 3)^5 \Longrightarrow$ գտնենք 3^5 =243-ը 13-ի բաժանելուց մնացորդը, որը ստացվում է 9:

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ)

ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

Պոլիտեխնիկական Միջվարժարանային ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

նվիրված ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյանի 80-ամյա հոբելյանին

Մաթեմատիկա XI դասարան լուծումներ

1. Գտնել $f: (0;\ +\infty) \to R$ ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

ա) $f(80) = 80$,

բ) $f(x)\cdot f(y) + f\left(\frac{80}{x}\right)\cdot f\left(\frac{80}{y}\right) = 160\cdot f(xy)$ ։

Լուծում

Տեղադրենք $x = y = 1$

$$f^2(1) + f^2(80) = 160f(1)$$
$$f^2(1) + 80^2 - 160f(1) = 0 \implies f(1) = 80$$

Տեղադրենք $y = 1$

$$f(x)\cdot f(80) + f\left(\frac{80}{x}\right)\cdot f(80) = 160\cdot f(x)$$
$$f(x)\cdot 80 + f\left(\frac{80}{x}\right)\cdot 80 = 160\cdot f(x)$$
$$f\left(\frac{80}{x}\right) = f(x)$$

Տեղադրեն ք $y = \frac{80}{x}$ կստանանք

$$f(x)\cdot f\left(\frac{80}{x}\right) + f\left(\frac{80}{x}\right)\cdot f(x) = 160\cdot f(80)$$
$$2f^2(x) = 160\cdot 80 \implies f^2(x) = 80^2 ։$$

2. Ապացուցել, որ $\forall a > b > 0$ թվերի համար

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{lna - lnb} < \frac{a+b}{2} ։$$

Լուծում

$$\sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} - 1}{ln\frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} + 1}{2}$$

Նշանակենք $\frac{a}{b} = x$, կստանանք

$$\frac{2(x-1)}{x+1} < lnx < \frac{x-1}{\sqrt{x}}, \quad x \in (1, +\infty)$$

Դիտարկենք $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} - lnx$ ֆունկցիան.

$$f'(x) = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} > 0\,, \text{ երբ } x \in (1, +\infty):$$

Նշանակում է $f(x)$ աճող է $(1, +\infty)$ միջակայքում:

$$f(x) > f(1) \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} - lnx > 0:$$

Նույն ձևով ապացուցվում է անհավասարության մյուս մասը:

3. Տասանիշ թիվը անվանենք հետաքրքիր, եթե նրա բոլոր թվանշանները տարբեր են և այն բաժանվում է 11111-ի: Գտնել հետաքրքիր թվերի քանակը:

Լուծում

Քանի որ տասանիշ թվի թվանշանները տարբեր են, իսկ այդ թվանշանների գումարը 45 է, այդ թվերը բաժանվում են 9-ի: Իսկ քանի որ նրանք բաժանվում են 11111-ի, ապա նրանք պետք է բաժանվեն նաև 99999-ի: Դիցուք $a_0, a_1, \cdots, a_9$ տասանիշ թիվն է: Հեշտ է նկատել, որ $a_0 + a_5 = 9$, $a_1 + a_6 = 9$, $a_2 + a_7 = 9$, $a_3 + a_8 = 9$, $a_4 + a_9 = 9$: Այսինքն հետքրքիր թվի վերջին հինգ թվանշանները կարելի է որոշել առաջին հինգ թվանշաններից, որոնք կարելի է ընտրել կամայականորեն, հաշվի առնելով միայն, որ նրանց ոչ մի երկուսի գումարը 9 չէ և a_9-ը ևս հավասար չէ զրոյի: Հետևաբար հետաքրքիր թվերի քանակը կլինի՝ $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$:

4. $A(9; -2; 2)$, $B(1; 6; 2)$և $C(-7; -2; 2)$կետերը գտնվում են կոնի հիմքի շրջանագծի վրա, իսկ $M(4; \sqrt{7} - 2; 5)$ կետը՝ նրա ծնորդի վրա:Գտե՛ք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

Լուծում

A, B և C կետերը $z = 2$ հարթության մեջ գտնվում են $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 64$ շրջանագծի վրա: M կետի պրոյեկցիան $z = 2$ հարթության վրա կլինի $M_1(4, \sqrt{7} - 2\,,\ 3)$ կետը, որը կոնի հիմքի կենտրոնից ունի 4 միավոր հեռավորություն: Կոնի բարձրությունը հավասար կլինի 6-ի, իսկ ծնորդը՝ 10-ի:

Պատ՝ 80

5. Դիցուք a և $b \in N$, ընդ որում $a + 77b$ թիվը բաժանվում է 79-ի, իսկ $(a + 79b)$ –ն՝ 77-ի: Որոշել $(a + b)$ -ի փոքրագույն արժեքը:

Լուծում

$$a + 77b = a - 2b + 79b \Rightarrow (a - 2b) \vdots 79 \Leftrightarrow (39a - 78b) \vdots 79 \Leftrightarrow (39a + b) \vdots 79$$
$$(a + 79b) \vdots 77 \Leftrightarrow (a + 2b) \vdots 77 \Leftrightarrow (39a + 78b) \vdots 77 \Leftrightarrow (39a + b) \vdots 77$$
$$(77, 79) = 1 \Rightarrow (39a + b) \vdots 79 \cdot 77 \Rightarrow 39a + b = 79 \cdot 77k \qquad k \in N$$

$$\Rightarrow 39a+39b=79\cdot 77k+38b=(78^2-1)k+38b=(78^2-39)k+38(k+b)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (k+b)\,\vdots\,39\Rightarrow b+k\geq 39\Rightarrow 39a+39b\geq (78^2-39)+38\cdot 39\Rightarrow a+b\geq 156-1+38=193$$

$\begin{matrix} b=38 \\ a=155 \end{matrix}\ \Big|$ բավ. է $\quad \begin{matrix} a+77b=155-2\cdot 38+79\cdot 38=79\cdot 39 \\ a+79b=155+2\cdot 38+77\cdot 38=77\cdot 41 \end{matrix}$

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
(ՀԻՄՆԱԴՐԱՄ)

ԵՐԵՎԱՆԻ ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

Polytechnic High School of Yerevan

Պոլիտեխնիկական Միջվարժարանային ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

նվիրված ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյանի 80-ամյա հոբելյանին

Մաթեմատիկա XII դասարան լուծումներ

1. Գտնել $x = 0$ կետում անընդհատ այն ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին.

$$80 \cdot f(80 \cdot x) = f(x) + 80 \cdot x \ :$$

Լուծում

$$x = 0, \quad nf(0) \Longrightarrow f(0) = 0$$

x-ի փոխարեն տեղադրենք $\frac{x}{n}$

$$nf(x) = f\left(\frac{x}{n}\right) + x \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}$$

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{n^2}\, f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^3} + \frac{x}{n}$$

բայց

$$f\left(\frac{x}{n^2}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^3}$$

Այնպես որ

$$f(x) = \frac{1}{n^3} f\left(\frac{x}{n^{3.}}\right) + \frac{x}{n^4} + \frac{x}{n^3} + \frac{1}{n}:$$

Ինդուկցիայով

$$f(x) = \frac{1}{n^k} f\left(\frac{x}{n^{k.}}\right) + \frac{x}{n^{2k-1}} + \cdots + \frac{x}{n}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{x}{n^{2k-1}} + \cdots + \frac{x}{n}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{nx}{n^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{nx}{x^2 - 1} \ :$$

2. Ապացուցել, որ կամայական $\forall\, n \geq 2$ բնական թվերի համար

$$1 + \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \cdots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} < n + 1 \ :$$

Լուծում

Նշանակենք $S_n = 1 + \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \cdots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$ ։ Պետք է ապացուցենք, որ $S_n < n + 1$ ։

$$\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k}\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot \dots \cdot 1}_{k-1 \text{ հատ}}} < \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}+k-1\right) = 1+\frac{1}{k^2}$$

$$S_n < 1 + \left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \dots + \left(1+\frac{1}{n^2}\right) = n + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< n + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = n + \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= n + \left(1-\frac{1}{n}\right) < n+1$$

3. Տասանիշ թիվը անվանենք հետաքրքիր, եթե նրա բոլոր թվանշանները տարբեր են և այն բաժանվում է 11111-ի: Գտնել հետաքրքիր թվերի քանակը:

Լուծում

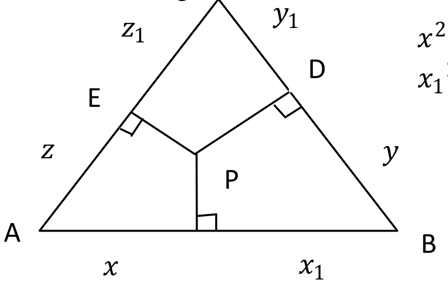
Քանի որ տասանիշ թվի թվանշանները տարբեր են, իսկ այդ թվանշանների գումարը 45 է, այդ թվերը բաժանվում են 9-ի: Իսկ քանի որ նրանք բաժանվում են 11111-ի, ապա նրանք պետք է բաժանվեն նաև 99999-ի: Դիցուք $a_0, a_1, \cdots, a_9$ տասանիշ թիվն է: Հեշտ է նկատել, որ $a_0 + a_5 = 9,\ a_1 + a_6 = 9,\ a_2 + a_7 = 9,\ a_3 + a_8 = 9,\ a_4 + a_9 = 9$: Այսինքն հետքրքիր թվի վերջին հինգ թվանշանները կարելի է որոշել առաջին հինգ թվանշաններից, որոնք կարելի է ընտրել կամայականորեն, հաշվի առնելով միայն, որ նրանց ոչ մի երկուսի գումարը 9 չէ և a_9-ը ևս հավասար չէ զրոյի: Հետևաբար հետաքրքիր թվերի քանակը կլինի՝ $9\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2 = 3456$:

4. ABC հավասարակողմ եռանկյան ներքին կամայական Pկետից $BC,\ CA$ ևAB կողմերին տարված են համապատասխանաբար $PD,\ PE$ և PF ուղղահայացները: Ապացուցել, որ

$$\frac{BD+CE+AF}{PD+PE+PF} = \sqrt{3}\ :$$

Լուծում

Նշանակենք $AF = x,\ BD = y,\ CE = z,\ BF = x_1,\ CD = y_1,\ AE = z_1$



Օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից, կստանանք.

$$x^2+y^2+z^2 = AP^2 - PF^2 + BP^2 - PD^2 + CP^2 - PE^2 \quad (1)$$

$$x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2 = BP^2 - PF^2 + CP^2 - PD^2 + AP^2 - PE^2 \quad (2)$$

(1) –ից և (2) –ից $\Longrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 = x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2$:

Մյուս կողմից՝

$$x^2+y^2+z^2 = (a-x_1)^2 + (a-y_1)^2 + (a-z_1)^2 =$$

$$= 3a^2 - 2a(x_1+y_1+z_1) + x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2 \Longrightarrow$$

$$x_1+y_1+z_1=\frac{3a}{2}=x+y+z$$

Քանի որ

$$PF+PD+PE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ուստի

$$\frac{x+y+z}{PF+PD+PE}=\sqrt{3}\ :$$

5. Դիցուք a և $b\in N$, ընդ որում $a+77b$ թիվը բաժանվում է 79-ի, իսկ $(a+79b)$ –ն՝ 77-ի: Որոշել $(a+b)$ -ի փոքրագույն արժեքը:

Լուծում

$$a+77b=a-2b+79b\Longrightarrow\ (a-2b)\ ⋮\ 79\Longleftrightarrow(39a-78b)\ ⋮\ 79\Longleftrightarrow(39a+b)\ ⋮\ 79$$
$$(a+79b)\ ⋮\ 77\Longleftrightarrow(a+2b)\ ⋮\ 77\Longleftrightarrow(39a+78b)\ ⋮\ 77\Longleftrightarrow(39a+b)\ ⋮\ 77$$
$$(77,79)=1\Longrightarrow(39a+b)\ ⋮\ 79\cdot 77\Longrightarrow 39a+b=79\cdot 77k\qquad k\in N$$
$$\Longrightarrow 39a+39b=79\cdot 77k+38b=(78^2-1)k+38b=(78^2-39)k+38(k+b)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow(k+b)\ ⋮\ 39\Longrightarrow b+k\geq 39\Longrightarrow 39a+39b\geq(78^2-39)+38\cdot 39\Longrightarrow$$
$$a+b\geq 156-1+38=193$$

$$\left.\begin{array}{r}b=38\\ a=155\end{array}\right|\ \text{բավ.է}\qquad \begin{array}{c}a+77b=155-2\cdot 38+79\cdot 38=79\cdot 39\\ a+79b=155+2\cdot 38+77\cdot 38=77\cdot 41\end{array}$$