

ՆԻԿԻՏԱ ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա
ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ՆՅՈՒԹԵՐ

7-րդ դասարան

խորացված ուսուցում

ԵՐԵՎԱՆ

2017

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻՆ ԱՌԸՆԹԵՐ
ԱՐՏԱՇԵՍ ՇԱՀԻՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ
ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒԿ ԴՊՐՈՑ

Ձեռնարկը համապատասխանեցված է
ԿԳ նախարարության կողմից հաստատված
մաթեմատիկայի մասնագիտացված ծրագրին

ՆԱԽԱԲԱՆ

Մաթեմատիկական կրթությունը և մաթեմատիկական մտածելակերպն անհրաժեշտ են ոչ միայն նրանց, ովքեր հետագայում կգրադվեն մաթեմատիկայով կամ գիտական ոլորտ հետազոտությամբ, այլ նաև բոլոր նրանց, ովքեր կաշխատեն ժողովրդական տնտեսության տարբեր բնագավառներում:

Դպրոցականների մտավոր կարողություններն ու նախասիրությունները, ինչպես նաև մաթեմատիկական մտածողության տարրերը հիմնականում ձևավորվում են միջին դպրոցում (5-9-րդ դասարաններում): Այդ շրջանում սովորողներից շատերը, որոնք իրենց առաջադիմությամբ մինչ այդ առանձնապես չեն փայլել, նպաստավոր պայմանների առկայության դեպքում կարող են մտավոր կարողությունների անսպասելի դրսևորումներ ցուցաբերել: Նրանք կարողանում են ինքնուրույն դատողություններ անել, նկատել որոշակի օրինաչափություններ, որոնել խնդիրների լուծման նոր, ոչ ստանդարտ եղանակներ:

Կրթության գործընթացում մաթեմատիկական խնդիրներն ունեն ուսուցողական, գործնական և դաստիարակչական նշանակություն: Նրանք զարգացնում են սովորողների ալգորիթմական, տրամաբանական մտածողությունը, մշակում մաթեմատիկական կիրառելի գործնական հմտություններ, ձևավորում աշխարհայացք: Խնդիրների լուծումը նրանց մղում է ստեղծագործական աշխատանքի:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերում զետեղված խնդիրները, որպես կանոն, նպատակաուղղված են տվյալ թեմայի տեսական նյութի յուրացմանը: Մահմանափակվելով միայն դասագրքում ընդգրկված խնդիրներով՝ սովորողների մոտ կարող են ձևավորվել միայն սերտողական բնույթի գիտելիքներ: Միօրին-

նակ կամ միայն ալգորիթմական խնդիրները չեն կարող ապահովել սովորողների մտավոր զարգացմանը ներկայացվող պահանջներին:

Մաթեմատիկայի նկատմամբ հակումներ ունեցող սովորողները չեն բավարարվում մաթեմատիկայի դասերին ստացած գիտելիքներով, հետևաբար և ցանկություն է առաջանում ավելի շատ տեղեկություն ստանալ իրենց սիրած առարկայի մասին, իմանալ, թե ինչպես է այն կիրառվում կյանքում, լուծել հետաքրքիր և ավելի բարդ խնդիրներ:

Սույն ձեռնարկում ընդգրկված նյութերը կարող են նպաստել մաթեմատիկական գիտելիքների ընդլայնմանը, ծրագրային նյութը խորությամբ յուրացնելուն, տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, հետազոտական ունակությունների ձևավորմանը, ինչպես նաև՝ մաթեմատիկական խոսքի կուլտուրայի զարգացմանը:

Գիրքը նախատեսված է բնագիտամաթեմատիկական հոսքի 7-րդ դասարանի սովորողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցիչներին՝ արտադասարանական պարապմունքներ անցկացնելու, ինչպես նաև աշակերտներին՝ մաթեմատիկական օլիմպիադաներին նախապատրաստվելու համար:

Մաղթում ենք հաջողություն:

Թեմա 1. Տոկոսով խնդիրներ

Տարբեր բնույթի գործնական հաշվարկներում հարմար է գործ ունենալ թվի $\frac{1}{100}$ մասի հետ:

Թվի $\frac{1}{100}$ մասն անվանում են տոկոս և գրում՝ 1% :

1%-ը թվի $\frac{1}{100}$ մասն է, հետևաբար՝ 3%-ը կլինի $\frac{3}{100}$ մասը, 25%-ը՝ $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ մասը և այլն:

Տոկոսը մասով արտահայտելու համար տոկոսային թիվը բաժանում ենք 100-ի:

Թվի $\frac{3}{5}$ մասն այդ թվի $\frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$ է: Թվի $\frac{9}{20}$ մասն այդ թվի $\frac{9}{20} \cdot 100 = 45\%$ է:

Մասը տոկոսով արտահայտելու համար մասն արտահայտող թիվը բազմապատկում ենք 100-ով:

Եթե a թվի $P\%$ -ը հավասար է b -ի, ապա՝ $\frac{a \cdot P}{100} = b$: (1)

Թվի որևէ տոկոսը հաշվելու համար թիվը բազմապատկում ենք տոկոսն արտահայտող թվով և ստացվածը բաժանում 100-ի:

60-ի 15%-ը հավասար է $\frac{60 \cdot 15}{100} = 9$:

$$(1) \quad \text{հավասարությունից} \quad a = \frac{100b}{P}, \text{ իսկ } P = \frac{100b}{a} :$$

Որպեսզի գտնենք, թե՛ն՝ n -ի $P\%$ -ն է հավասար b -ի, b -ն բազմապատկում ենք 100-ով և բաժանում P -ի:

$$\text{Գտնենք թիվը, որի 16\%-ը հավասար է 20-ի.} \quad \frac{100 \cdot 20}{16} = 125 :$$

Որպեսզի գտնենք, թե՛ b -ն a -ի n -ի տոկոսն է, b -ն բազմապատկում ենք 100-ով և բաժանում a -ի:

$$\text{Գտնենք, թե՛ 32-ը 40-ի n -ի տոկոսն է կազմում.} \quad \frac{100 \cdot 32}{40} = 80\% :$$

a թիվը $P\%$ -ով մեծացնելու համար այդ թիվը բազմապատկում ենք $(1 + \frac{P}{100})$ -ով:

$$\text{Իրո՛ք.} \quad a + \frac{aP}{100} = a(1 + \frac{P}{100}) :$$

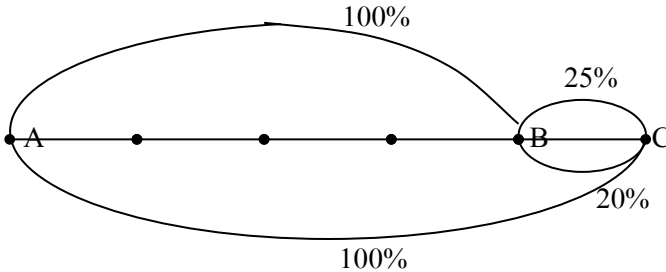
$$\text{Եթե՛ 60-ը մեծացնենք 15\%-ով, ապա կստանանք.} \\ 60 \cdot (1 + \frac{15}{100}) = 69 :$$

a թիվը $P\%$ -ով փոքրացնելու համար այդ թիվը բազմապատկում ենք $(1 - \frac{P}{100})$ -ով՝ $a(1 - \frac{P}{100})$:

$$\text{Եթե՛ 40-ը փոքրացնենք 15\%-ով, ապա կստանանք.} \\ 40 \cdot (1 - \frac{15}{100}) = 34 :$$

Տոկոսի վերաբերյալ խնդիրներում կարևոր է ճիշտ ընտրել, թե ո՞ր մեծությունն է համարվում 100%-ը:

Խնդիր. Տանձը խնձորից թանկ է 25%-ով: Քանի՞ տոկոսով է խնձորը տանձից էժան:



AB հատվածով պատկերված է խնձորի գինը՝ 100%, BC հատվածը AB-ի 25%-ն է՝ $\frac{1}{4}$:

Հետևաբար՝ AC հատվածը պատկերում է տանձի գինը: Այժմ ամբողջն AC-ն է՝ 100%, իսկ BC-ն՝ ամբողջի $\frac{1}{5}$ -ը՝ 20%-ը: Նշանակում է՝ խնձորը տանձից էժան է 20%-ով:

Լուծում: Եթե խնձորը լինի 100 դրամ, ապա տանձը կլինի $100 \cdot (1 + \frac{25}{100}) = 125$ դրամ: Այժմ գտնենք, թե 100-ը քանի տոկոսով է փոքր 125-ից. $125 \cdot (1 - \frac{p}{100}) = 100$:

Որտեղից կստանանք՝ $p = 20\%$:

Խնդիրներ

1. Ամսագիրը 75%-ով էժան է գրքից: Քանի՞ տոկոսով է գիրքն ամսագրից թանկ:
2. Խնձորը 60%-ով թանկ է սալորից: Քանի՞ տոկոսով է սալորը խնձորից էժան:
3. Երկու խանութում կաթը վաճառվում էր նույն գնով: Առաջին խանութում կաթն էժանացավ 40%-ով, իսկ երկրորդ խանութում սկզբում էժանացավ 20%-ով, այնուհետև՝ 25%-ով: Որոշե՛լ, թե էժանացումներից հետո ո՞ր խանութում է կաթը վաճառվում ավելի էժան:
4. Ուղղանկյունաձև հողամասն ընդարձակեցին՝ երկարությունն ավելացրին 50%-ով, իսկ լայնությունը՝ 10%-ով: Քանի՞ տոկոսով մեծացավ հողամասի մակերեսը:
5. Ինչպե՞ս կփոխվի ուղղանկյան մակերեսը, եթե երկարությունը մեծացնեն 25%-ով, իսկ լայնությունը փոքրացնեն 20%-ով:
6. Գերազանցիկ ուսանողի կրթաթոշակը 100%-ով է բարձր սովորական ուսանողի կրթաթոշակից, իսկ հարվածայինինը՝ 50%-ով: Քանի՞ տոկոսով է հարվածային ուսանողի կրթաթոշակը գերազանցիկինից քիչ:
7. Սառելիս ջրի ծավալը մեծանում է 2,4%-ով: Հալվելիս քանի՞ տոկոսով է փոքրանում սառույցի ծավալը:
8. Մարդու քաշը գարնանը պակասեց 25%-ով, ամռանն ավելացավ 20%-ով, աշնանը պակասեց 10%-ով, իսկ ձմռանն ավելացավ 20%-ով: Նիհարե՞ց, թե՞ չաղացավ մարդն այդ տարվա ընթացքում:
9. Երբ առաջին ամանի կաթի 12,5%-ը լցրեցին երկրորդ ամանի մեջ, երկուսում էլ կաթի պարունակությունը եղավ 35-ական լիտր: Քանի՞ լիտր կաթ կար ամաններից յուրաքանչյուրում:

10. Նոր հնձած խոտը պարունակում է 60% ջուր, իսկ չորացրածը՝ 20%: Պարզել, թե.
 - ա) որքա՞ն չորացրած խոտ կստացվի 1 տ թաց խոտից,
 - բ) ինչքա՞ն խոտ պետք է հնձել, որ չորացնելուց հետո ստացվի 1տ չոր խոտ:
11. Թարմ միրգը պարունակում է 92% ջուր, իսկ չորացրածը՝ 20%: Քանի՞ անգամ փոքրացավ մրգի քաշը չորացնելիս:
12. Երկու դրական թվերից մեկը մեծացրին 2%-ով, իսկ մյուսը՝ 5%-ով: Կարո՞ղ է արդյոք դրանց գումարը մեծանալ.
 - ա) 1%-ով, բ) 3%-ով, գ) 7%-ով:
13. a դրական թվի 2%-ը հավասար է b թվի 3%-ին: Ո՞րն է ավելի մեծ.
 - ա) a-ի 3%-ը, թե՞ b-ի 5%-ը, բ) a-ի 5%-ը, թե՞ b-ի 7%-ը:
14. Բանկում դրված ավանդը յուրաքանչյուր տարում աճում է 11%-ով: Քանի՞ տարի է անհրաժեշտ, որպեսզի բանկում դրված գումարը դառնա սկզբնական գումարից 50%-ով ավելի:
15. Յուրաքանչյուր լվացվելուց հետո օձառի ծավալը փոքրանում է 10%-ով: Քանի՞ անգամ լվացվելուց հետո կմնա օձառի կեսից քիչը:
16. Երբ խնձորը 10%-ով էժանացրին, օրվա վաճառքը մեծացավ 20%-ով: Քանի՞ տոկոսով ավելացավ օրվա վաճառքից ստացված գումարը:
17. Նույն գումարով քանի՞ տոկոսով ավելի դեղձ է հնարավոր գնել, եթե էժանացնեն 20%-ով:
18. Քանի՞ տոկոսով կնվազի մեքենայի՝ նպատակակետ հասնելու ժամանակը, եթե նույն ճանապարհն ընթանա 25%-ով ավելի մեծ արագությամբ:
19. Գնացքը նախատեսված ժամանակի $\frac{2}{3}$ -ի ընթացքում անցավ ճանապարհի $\frac{3}{4}$ մասը: Դրանից հետո գնաց ավելի ցածր արագությամբ և ժամանակին տեղ հասավ: Քանի՞ տոկոսով գնացքն իջեցրեց արագությունը:

20. Երկու դրական թվերի միջին թվաբանականը 50%-ով մեծ է դրանցից մեկից: Քանի՞ տոկոսով է թվաբանական միջինը մյուսից փոքր:
21. Երկու դրական թվերի միջին թվաբանականը 30%-ով փոքր է դրանցից մեկից: Քանի՞ տոկոսով է թվաբանական միջինը մյուսից մեծ:
22. Գրիչը մատիտից 25%-ով թանկ է, իսկ տետրից՝ 20%-ով էժան: Քանի՞ տոկոսով է մատիտը տետրից էժան:
23. Ամսագիրը 20%-ով թանկ է տետրից և 20%-ով էժան՝ գրքից: Քանի՞ տոկոսով է գիրքը տետրից թանկ:
- 24*. Արմենը և Բագրատը կանգնած են շրջանաձև ճանապարհի տրամագծորեն հակադիր կետերում: Նրանք սկսում են վազել ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ: Արմենի արագությունը 20%-ով ավելի է Բագրատի արագությունից: Քանի՞ պտույտ կկատարի Արմենը՝ Բագրատին հասնելու համար:
- 25*. Գրատախտակին գրված է մի քանի հաջորդական բնական թիվ՝ 1-ից սկսած. 1, 2, 3, ... : Քանի՞ թիվ է գրված գրատախտակին, եթե այդ թվերի.
- ա) 40%-ը գույգ է, բ) 52%-ը կենտ է,
 - գ) 30%-ը 3-ի բազմապատիկ է:

Թեմա 2. Համատեղ աշխատանք

Դիցուք՝ երկու բանվոր պետք է համատեղ կատարեն ինչ-որ աշխատանք: Ենթադրենք՝ նրանցից մեկն այդ աշխատանքը մենակ կարող է կատարել՝ x օրում, մյուսը՝ y օրում, իսկ երկուսով միասին՝ z օրում: Քանի որ առաջին բանվորը մեկ օրում կատարում է ամբողջ աշխատանքի $\frac{1}{x}$ մասը (այն մեծությունը, որը ցույց է տալիս ժամանակի միավորում կատարած աշխատանքը, անվանում են արտադրողականություն), երկրորդը՝ $\frac{1}{y}$ մասը, իսկ համատեղ աշխատելիս՝ $\frac{1}{z}$ մասը, ուստի կարող ենք գրել $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ հավասարությունը: Նշենք նաև, որ եթե այդ աշխատանքը կատարելիս առաջին բանվորը աշխատել է՝ a օր, իսկ երկրորդը՝ b օր, ապա կունենանք $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ հավասարությունը:

Նշված առնչությունները հնարավորություն են տալիս խնդիրներում կապ ստեղծելու խնդրի տվյալների և անհայտ մեծության միջև: Ներկայացնենք խնդիր:

Խնդիր: Բանվորներից մեկը որոշակի աշխատանք կարող է միայնակ կատարել 10 օրում, մյուսը՝ 15 օրում:

ա) Քանի՞ օրում նրանք համատեղ կկատարեն այդ աշխատանքը:
բ) Առաջին բանվորը 4 օր աշխատելուց հետո՝ քանի՞ օրում երկրորդ բանվորը կավարտի աշխատանքի մնացած մասը:

Լուծում: Ըստ վերը նշված հավասարությունների՝ կունենանք.

ա) $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{z}$, որտեղից՝ $z=6$ օր:

բ) $\frac{4}{10} + \frac{b}{15} = 1$, որտեղից՝ $b=9$ օր:

Ներկայացնենք խնդրի լուծման ևս մեկ ուշագրավ եղանակ: Վերցնենք $x=10$ և $y=15$ թվերի որևէ բազմապատիկ (եթե x և y կոտորակային թվեր են, ապա դրանց համարիչների բազմապատիկ): Մեր օրինակում $[10; 15]=30 : 30$ օրում առաջին բանվորը կկատարի այդպիսի $\frac{30}{10} = 3$ աշխատանք, իսկ երկրորդը՝ $\frac{30}{15} = 2$: Այսինքն՝ 30 օրում նրանք համատեղ կկատարեն այդպիսի $2+3=5$ աշխատանք: Հետևաբար՝ այդպիսի մեկ աշխատանքը համատեղ կկատարեն $\frac{30}{5} = 6$ օրում:

Խնդիրներ

1. Բրիգադներից մեկը 1 տ խաղողը հավաքում է 4 ժամում, իսկ մյուսը՝ 3 ժամում: Քանի՞ ժամում նրանք միասին կհավաքեն 7 տ խաղողը:
2. Տրակտորներից մեկը 5 ժամում վարում է 9 ար, իսկ մյուսը՝ 4 ժամում 7 ար: Քանի՞ ժամում դրանք միասին կվարեն 71 ար մակերեսով դաշտը:
3. Արտադրամասի առաջին արտադացը 3 ժամում աղում է 50 կգ ցորեն, երկրորդը՝ 6 ժամում 110 կգ, երրորդը՝ 2 ժամում 30 կգ: Ամենաքիչը որքա՞ն ժամանակում երեք աղացը կաղան 400 կգ ցորենը:
4. Ծորակներից մեկը ջրավազանը լցնում է 12 ժամում, մյուսը՝ 18 ժամում: Դատարկ ավազանի ո՞ր մասը կլցվի, եթե առաջին ծորակը բացենք 4 ժամ, երկրորդը՝ 3 ժամ: Ո՞ր ծորակն ավելի շատ ջուր կլցնի՝ առաջինը 7 ժամում, թե՞ երկրորդը՝ 11 ժամում:
5. Երկու բանվոր որոշակի աշխատանք համատեղ կարող են կատարել 18 ժամում: Քանի՞ ժամում կարող է այդ աշխատանքը կատարել միայն երկրորդ բանվորը, եթե առաջին բանվորը միայնակ կարող է կատարել 45 ժամում:

6. Ջրավազանը երկու ծորակով լցնելու համար պահանջվում է 6 ժ 40 ր, իսկ միայն առաջին ծորակով լցնելու համար՝ 12 ժ: Քանի՞ ժամում ավազանը կլցվի միայն երկրորդ ծորակով:
7. Երկու օր համատեղ աշխատելով՝ երկու տրակտոր վարեցին դաշտի $\frac{1}{5}$ մասը: Քանի՞ օրում կարող է ամբողջ դաշտը վարել միայն երկրորդ տրակտորը, եթե 2,5 անգամ դանդաղ է աշխատում, քան առաջինը:
8. A և B վայրերից միաժամանակ իրար ընդառաջ մեկնեցին երկու ավտոմեքենա և հանդիպեցին շարժումն սկսելուց 5 ժամ անց: Առաջին մեքենան B հասավ հանդիպումից 3 ժամ անց: Ինչքա՞ն ժամանակում երկրորդ մեքենան անցավ B-ից A ճանապարհը:
9. Շրջանաձև վազքուղով վազորդներից մեկը մեկ պտույտը կատարում է 6 ր-ում, մյուսը՝ 9 ր-ում: Ինչքա՞ն ժամանակից նրանք կհանդիպեն, եթե դուրս գան վազքուղու նույն կետից և շարժվեն՝
 - ա) նույն ուղղությամբ, բ) հակառակ ուղղություններով:
10. Անշարժ շարժասանդուղքով մարդն իջնում է 42 վրկ-ում, իսկ կանգնելով շարժվող շարժասանդուղքի վրա՝ 56 վրկ-ում: Քանի՞ վայրկյանում մարդը կիջնի՝ քայլելով շարժվող շարժասանդուղքով:
11. Ձեռագրի մեքենագրումը հանձնարարեցին երեք մեքենագրուհու: Առաջին մեքենագրուհին ամբողջ ձեռագիրը կարող է միայնակ մեքենագրել 10 ժամում, երկրորդը՝ 12 ժամում, երրորդը՝ 15 ժամում: Քանի՞ ժամում նրանք համատեղ կմեքենագրեն ամբողջ ձեռագիրը:
12. Խոտի պաշարը կովն ուտում է 20 օրում, ձին՝ 30 օրում, իսկ ոչխարը՝ 60 օրում: Քանի՞ օրում խոտի այդ պաշարը կուտեն.
 - ա) կովը և ձին միասին, բ) ձին և ոչխարը միասին,
 - գ) կովը, ձին և ոչխարը միասին:

13. Առաջին ծորակով ավազանը լցվում է 30 ժամում, իսկ երկրորդ ծորակով լցվում է 1,5 անգամ արագ, քան առաջինով: Առաջին ծորակով 12 ժամ դատարկ ավազանը լցնելուց հետո՝ ավազանի մնացած մասը քանի՞ ժամում կլցվի երկրորդ ծորակով:
14. Ավազանը երկու ծորակով լցնելու համար պահանջվում է 15 ժ: Առաջին ծորակով ավազանի $\frac{1}{3}$ -ը լցնելու համար պահանջվում է այնքան ժամանակ, ինչքան երկրորդ ծորակով ավազանի $\frac{1}{5}$ -ը լցնելու համար: Քանի՞ ժամում ծորակներից յուրաքանչյուրը կլցնի ամբողջ ավազանը:
15. Երկու բանվոր որոշակի աշխատանք համատեղ կարող են կատարել 18 ժամում: Եթե առաջին բանվորը միայնակ աշխատի 10 ժամ, ապա աշխատանքի մնացած մասը միայն երկրորդ բանվորը կարող է կատարել 30 ժամում: Քանի՞ ժամում նրանք համատեղ կկատարեն ամբողջ աշխատանքը, եթե առաջինն աշխատի երկու անգամ դանդաղ, իսկ երկրորդը՝ երեք անգամ արագ:
16. Ձնահավաք մեքենաներից մեկը փողոցը կարող է մաքրել 3 ժամում, իսկ մյուսը՝ 4,5 ժամում: Մեքենաներից յուրաքանչյուրը 1 ժամում ծախսում է 8 լ վառելիք: Ո՞ր դեպքում ավելի քիչ վառելիք կծախսվի և որքանո՞վ, եթե՝ ա) մեքենաները փողոցն սկսեն մաքրել տարբեր ծայրերից՝ մինչև հանդիպելը, բ) մեքենաներից մեկը մաքրի փողոցի կեսը, իսկ մյուսը՝ մյուս կեսը:
17. 6 տրակտոր 6 ժամում վարում են 18 ար: Քանի՞ տրակտոր է անհրաժեշտ 35 արը 7 ժամում վարելու համար:
18. 20 ճանապարհաշինարար երկու օրում, աշխատելով օրական 10 ժամ, վերանորոգեցին 20 կմ ճանապարհ: Քանի՞ ճանապարհաշինարարն 8 ժամում կվերանորոգեն 2 կմ ճանապարհը:

19. Կոմբայնը կարող է դաշտը հնձել 20 օրում: Քանի՞ օրում կավարտվի հունձը, եթե աշխատանքային օրվա կեսը կոմբայնն աշխատի երկու անգամ արագ, իսկ կեսօրից հետո՝ երկու անգամ դանդաղ:
20. Որոշակի աշխատանք առաջին կարգի 9 բանվորը կատարում են 8 ժամում: Քանի՞ ժամում այդ նույն աշխատանքը կկատարեն երկրորդ կարգի 8 բանվորը, եթե նրանց արդյունավետությունը 20% ավելի է, քան առաջին կարգի բանվորի արդյունավետությունը:
21. Յոթ միատեսակ տրակտորներից կազմված խումբը դաշտը կարող է հերկել 42 օրում: Քանի՞ այդպիսի տրակտոր է անհրաժեշտ դաշտը 28 օրում հերկելու համար, եթե տրակտորներն աշխատեն 25% պակաս արտադրողականությամբ:
22. Երկու բանվոր մեկ օրում անտառում կարող են հավաքել 3 մ³ փայտ կամ կտրատել 6 մ³ փայտ: Քանի՞ մ³ փայտ կարող են նրանք հավաքել և կտրատել 1 օրում:
23. Տրակտորը մեկ օրում կարող է վարել 12 ար կամ ցանել 18 ար: 10 օրում տրակտորը քանի՞ ար կարող է վարել և վարածը ցանել:
- 24*. Պետրոսը և Անդրանիկը խրամատը կարող են փորել 20 օրում, Հովհաննեսը և Անդրանիկը՝ 15 օրում, իսկ Պետրոսը և Հովհաննեսը՝ 12 օրում: Քանի՞ օրում կարող է Անդրանիկը միայնակ փորել խրամատը:
- 25*. Երեք բանվոր փոս են փորում: Նրանք աշխատում են հերթով: Յուրաքանչյուրն աշխատում է այնքան ժամանակ, ինչքան անհրաժեշտ է մյուս երկուսին՝ փոսի կեսը փորելու համար: Այդպես աշխատելով՝ նրանք փորեցին փոսը: Քանի՞ անգամ նրանք արագ կփորեն փոսը, եթե աշխատեն միասին:

Թեմա 3. Բնական թվի դիրքային գրությունը

Ինչպես գիտեք՝ բնական թվերը սովորաբար գրառում են տասական համակարգում՝ օգտագործելով $0, 1, 2 \dots 9$ թվանշանները: Այդ գրելաձևը դիրքային է, այսինքն՝ կարևոր է թվի գրության մեջ թվանշանի դիրքը: Դա հաշվի է առնվում թիվը կարգային գումարելիների գումարով ներկայացնելիս:

Օրինակ՝ 7 հազարավոր, 3 հարյուրավոր, 8 տասնավոր և 4 միավոր պարունակող քառանիշ թիվը գրվում է հետևյալ կերպ.
 $7384 = 7 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 4$:

Բնական թվի վերաբերյալ խնդիրներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում տառերով նշանակել թվի անհայտ թվանշանները:

Այսպես՝ x հարյուրավոր, y տասնավոր, z միավոր ունեցող եռանիշ թիվը նշանակում ենք՝ $\overline{xyz}$ տեսքով (զժիկը դրվում է xyz արտադրյալից տարբերելու համար) և, հետևաբար՝ $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$:

Խնդիր 1. Գտե՛ք 3 տասնավոր ունեցող այն երկնիշ թիվը, որի կրկնապատիկը 1-ով մեծ է նույն թվանշաններով, բայց հակառակ դասավորությամբ գրված թվից:

Լուծում: Դիցուք՝ այդ թիվը $\overline{3x}$ -ն է: Ըստ խնդրի պայմանների՝ կունենանք $2 \cdot \overline{3x} = \overline{x3} + 1$ կամ $2(3 \cdot 10 + x) = 10x + 3 + 1$: Լուծելով այս հավասարումը՝ կստանանք $x = 7$: Հետևաբար՝ այդ թիվը 37-ն է:

Երբեմն հարմար է թվի թվանշանները նշանակել թվանշանի կարգային միավորը ցուցանող ինդեքսներով՝ տառերով:

Այսպես՝ եթե a բնական թիվը գրվում է $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ թվանշաններով՝ նշված հաջորդականությամբ՝

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}, \text{ ապա}$$

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0:$$

Նշենք նաև, որ երբեմն գրությունը պարզեցնելու նպատակով տառով նշանակում ենք թվի որևէ «մասը» (թվի մի քանի հաջորդական թվանշաններից կազմված թիվը): Դա հարմար է կիրառել այն խնդիրներում, որոնցում թվի մի խումբ թվանշանների փոխդասավորությունը չի փոխվում:

Օրինակ՝ եթե a բնական թվի աջից կցագրել են x թվանշանը, ապա կարելի է գրել, որ $\overline{ax} = 10a + x$, իսկ եթե a թվին x թվանշանը կցագրվել է ձախից, ապա $\overline{xa} = x \cdot 10^n + a$, որտեղ n -ը a -ի թվանշանների քանակն է:

Նշվածները ներկայացնենք խնդիրների միջոցով:

Խնդիր 2. Եթե 8 թվանշանը եռանիշ թվին կցագրեն ձախից, ապա կստանան 3735-ով մեծ թիվ, քան աջից կցագրելիս: Գտե՛ք այդ եռանիշ թիվը:

Լուծում: Եթե եռանիշ թիվը նշանակենք x -ով, ապա կարող ենք գրել՝ $\overline{8x} - 3735 = \overline{x8}$: Հետևաբար՝ $(8000 + x) - 3735 = 10x + 8$, որտեղից՝ $x = 473$:

Խնդիր 3. Վեցանիշ թիվն սկսվում է 2 թվանշանով: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխեն թվի վերջը, ապա թիվը 3 անգամ կմեծանա: Գտե՛ք սկզբնական թիվը:

Լուծում: Վեցանիշ թիվը, որն սկսվում է 2 թվանշանով, ունի $\overline{2xyzuv}$ տեսքը: Այստեղ հարմար է $\overline{xyzuv}$ հնգանիշ թիվը նշանակել a -ով: Այդ դեպքում կունենանք.

$$\overline{2xyzuv} = 200000 + a, \text{ իսկ } \overline{xyzuv2} = 10a + 2:$$

Խնդրի պայմաններից ելնելով՝ կստանանք

$$(200000 + a) \cdot 3 = 10a + 2 \quad \text{հավասարումը, որտեղից էլ } a = 85714:$$

Հետևաբար՝ որոնելի թիվը 285714-ն է:

Խնդիրներ

1. Բազմանդամի տեսքով գրե՛ք այն բնական թիվը, որը բաղկացած է.

ա) a տասնավորից և b միավորից,

բ) x հարյուրավորից, y տասնավորից և z միավորից,

գ) 7 հազարավորից, c տասնավորից և 2 միավորից:

2. Թիվը ներկայացրե՛ք բազմանդամի տեսքով (a -ն և b -ն թվանշաններ են).

ա) $\overline{a7}$

բ) $\overline{3a0b}$

գ) $\overline{5a7b4}$

դ) $\overline{aa\overline{aa}}$

3. Տրված է x եռանիշ թիվը: x փոփոխականով բազմանդամի տեսքով գրե՛ք այն թիվը, որը կստացվի, եթե x թվի.

ա) ձախից կցագրեք 5, բ) աջից կցագրեք 6,

գ) աջից կցագրեք 21, դ) աջից կցագրեք 4, իսկ ձախից՝ 7:

4. Թիվը ներկայացրե՛ք կարգային գումարելիներով.

ա) $\underbrace{11 \dots 1}_{7 \text{ հաւոն}}$

բ) $\underbrace{3 \overline{00 \dots 0} 4}_{10 \text{ հաւոն}}$

գ) $\underbrace{5 \overline{00 \dots 0} 6}_{7 \text{ հաւոն}} \underbrace{\overline{00 \dots 0} 2}_{9 \text{ հաւոն}}$

5. Կատարե՛ք գումարումը.

ա) $\underbrace{55 \dots 5}_{12 \text{ հաւոն}} + \underbrace{22 \dots 2}_{8 \text{ հաւոն}}$

բ) $\underbrace{88 \dots 8}_{10 \text{ հաւոն}} + 33$

գ) $\underbrace{77 \dots 7}_{20 \text{ հաւոն}} + \underbrace{33 \dots 3}_{10 \text{ հաւոն}}$

դ) $\underbrace{999 \dots 9}_{30 \text{ հաւոն}} + \underbrace{22 \dots 2}_{30 \text{ հաւոն}}$

6. Կատարե՛ք հանումը.

ա) $\underbrace{1 \overline{00 \dots 0}}_{10 \text{ հաւոն}} - 38$

բ) $\underbrace{88 \dots 8}_{15 \text{ հաւոն}} - \underbrace{5 \dots 5}_{10 \text{ հաւոն}}$

գ) $\underbrace{1 \overline{00 \dots 0}}_{20 \text{ հաւոն}} - \underbrace{5 \overline{00 \dots 0}}_{10 \text{ հաւոն}}$

դ) $\underbrace{66 \dots 6}_{15 \text{ հաւոն}} - \underbrace{77 \dots 7}_{10 \text{ հաւոն}}$

7. Կատարե՛ք բազմապատկումը.

$$\text{ա) } \underbrace{500 \dots 0}_{{}_{10} \text{ հաւո}} 3 \cdot 6$$

$$\text{բ) } \underbrace{33 \dots 3}_{{}_{15} \text{ հաւո}} \cdot 3$$

$$\text{գ) } \underbrace{22 \dots 2}_{{}_{14} \text{ հաւո}} \cdot 11$$

$$\text{դ) } \underbrace{10011001 \dots 1001}_{{}_{10} \text{ հաւո}} \cdot 74$$

8. Կատարե՛ք բաժանումը.

$$\text{ա) } \underbrace{88 \dots 8}_{{}_{40} \text{ հաւո}} : 22$$

$$\text{բ) } \underbrace{11 \dots 10}_{{}_{20} \text{ հաւո}} : 5$$

$$\text{գ) } \underbrace{44 \dots 4}_{{}_{40} \text{ հաւո}} : \underbrace{22 \dots 2}_{{}_{20} \text{ հաւո}}$$

$$\text{դ) } \underbrace{99 \dots 9}_{{}_{30} \text{ հաւո}} : 37$$

9. Ապացուցե՛ք, որ.

$$\text{ա) } \underbrace{11 \dots 1}_{{}_{14} \text{ հաւո}} = \frac{10^{14}-1}{9}$$

$$\text{բ) } \underbrace{44 \dots 4}_{{}_{17} \text{ հաւո}} = \frac{4 \cdot (10^{17}-1)}{9}$$

$$\text{գ) } \underbrace{33 \dots 3}_{{}_{19}} = \frac{10^{19}-1}{3}$$

$$\text{դ) } \underbrace{11 \dots 1}_{{}_{10} \text{ հաւո}} \underbrace{22 \dots 2}_{{}_{10} \text{ հաւո}} = \frac{10^{20}+10^{10}-2}{9}$$

10. Գտե՛ք այն երկնիշ թիվը, որը 6 անգամ մեծ է իր թվանշանների գումարից:

11. Քանի՞ երկնիշ թիվ կա, որոնցից յուրաքանչյուրը 7 անգամ մեծ է իր թվանշանների գումարից:

12. Գտե՛ք այն երկնիշ թիվը, որն իր թվանշանների գումարին բաժանելիս քանորդում ստացվում է 8, իսկ մնացորդում՝ 4:

13. Երկնիշ թվի թվանշաններից մեկը երկու անգամ մեծ է մյուս թվանշանից: Ապացուցե՛ք, որ այդ թիվը բաղադրյալ է:

14. Գտե՛ք այն երկնիշ թիվը, որի թվանշանների տեղերը փոխելիս ստացվում է սկզբնական թվից 20 % մեծ թիվ:

15. Եթե երկնիշ թվի ձախից կցագրենք 1, իսկ աջից՝ 5, ապա կստանանք սկզբնական թվից 25 անգամ մեծ թիվ: Գտե՛ք սկզբնական թիվը:

16. Գտե՛ք այն բոլոր $\overline{xyz}$ եռանիշ թվերը, որոնց թվանշանները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

ա) $3x = 4y = 6z$

բ) $2x = 3y = 4z$

17. Գտե՛ք այն եռանիշ թիվը, որի միավորը 3 անգամ մեծ է տասնավորից և 7-ով մեծ՝ հարյուրավորից:

18. Ապացուցե՛ք, որ միևնույն թվանշաններից կազմված եռանիշ թիվը բաժանվում է 37-ի:

19. Եթե եռանիշ թվի ձախից կցագրեն 3 և ստացված թիվը բաժանեն սկզբնական թվին, ապա քանորդում կստացվի 9, իսկ մնացորդում՝ 80: Գտե՛ք սկզբնական թիվը:

20. Ապացուցե՛ք, որ եթե եռանիշ թվին կցագրեն նույն թիվը, ապա ստացված վեցանիշ թիվը կբաժանվի. ա) 7-ի, բ) 13-ի :

21. Եթե եռանիշ թվին մեկ անգամ աջից, մյուս անգամ ձախից կցագրեն 7 թվանշանը, ապա ստացված թվերից մեծի և փոքրի տարբերությունը կլինի 1323: Գտե՛ք սկզբնական թիվը:

22. Եթե քառանիշ թվին ձախից կցագրեն 5, իսկ աջից՝ 2 , ապա կստանան սկզբնականից 99 անգամ մեծ թիվ: Գտե՛ք այդ քառանիշ թիվը:

23. Քառանիշ թիվն սկսվում է 2 թվանշանով: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխեն թվի վերջը, իսկ մյուս թվանշանների դասավորվածությունը պահպանեն, ապա թիվը 5157-ով կմեծանա: Գտե՛ք սկզբնական թիվը:

24. Ապացուցե՛ք, որ միևնույն թվանշաններից կազմված հնգանիշ թիվը բաժանվում է.

ա) 41-ի,

բ) 271-ի:

25. Եթե հնգանիշ թվին ձախից կցագրենք 4 թվանշանը, ապա կստանանք 4 անգամ ավելի մեծ թիվ, քան աջից 4 կցագրելիս: Գտե՛ք սկզբնական թիվը:

26. Վեցանիշ թվի ձախից առաջին թվանշանը 5 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխեն թվի վերջը, ապա կստանան 4 անգամ փոքր թիվ: Գտե՛ք սկզբնական թիվը:

27. Թվի ձախից առաջին թվանշանը 9 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխեն թվի վերջը, ապա կստանան 4 անգամ փոքր թիվ: Գտե՛ք այդ թիվը:

28*. Եթե հնգանիշ թվից ջնջեն վերջին թվանշանը և ստացված թիվը գումարեն սկզբնական թվին, ապա կստանան 72020: Գտե՛ք սկզբնական թիվը:

29*. Երկու քառանիշ թվերի գումարը 7589 է: Եթե առաջին թվի ձախից կցագրեն 3, իսկ երկրորդ թվի աջից կցագրեն 2, ապա կստացվեն երկու հավասար թվեր: Գտե՛ք սկզբնական թվերը:

30*. Երկու բնական թվերի գումարը 6319 է: Եթե առաջին թվին աջից կցագրեն 5, իսկ երկրորդի վերջին թվանշանը, որը 7 է, դեն նետեն, ապա կստանան երկու հավասար թվեր: Գտե՛ք սկզբնական թվերը:

Թեմա 4. Տրամաբանական խնդիրներ

Աշակերտների մաթեմատիկական մտածողության և մաթեմատիկական կուլտուրայի բարձրացման գործում մեծ դեր ունեն այն տրամաբանական խնդիրները, որոնք լուծելիս հատուկ մաթեմատիկական գիտելիքներ չեն պահանջվում, և բարդ հաշվումներ չեն կատարվում: Այդ խնդիրների շարքն են դասվում, այսպես ասած, պուժետային խնդիրները: Դրանց լուծումը չի սահմանափակվում լոկ խնդրի պայմաններին բավարարող որևէ պատասխան գտնելով, այլ պետք է, խնդրի տվյալները համադրելով, կատարել ենթադրություններ, այնուհետև՝ դրանք հերքել կամ ապացուցել: Նշենք նաև այն, որ ապացուցելու անհրաժեշտությանն այս խնդիրներում աշակերտի համար ավելի բնական է, քան մաթեմատիկայի այլ բաժիններում: Կարևոր է նաև այն, որ խնդիրների այս շարքը աշակերտները կարող են քննարկել նաև ընտանիքի մյուս անդամների հետ, ինչը, անշուշտ, դրական ազդեցություն կունենա ընտանիքում կրթական ուղղվածությամբ շփումների համար: Ուշադրության արժանի է նաև այն, որ խնդիրների մի մասը լուծվում է նաև բանավոր՝ այսպես ասած՝ առանց թղթի և գրիչի, հետևաբար՝ կարող են առաջադրվել տարբեր միջոցառումների ընթացքում (հավաքներ, արշավ, էքսկուրսիա և այլն):

Դիտարկենք խնդիրներ և ներկայացնենք դրանց լուծման եղանակներ: Բայց թե ինչպե՞ս կլուծի աշակերտը՝ ընտրում է ինքը, ավելին՝ հնարավոր է, որ նա ցուցաբերի այլ մոտեցում: Ներկայացնենք դեպքերի քննարկման եղանակը <ճիշտ> և <սխալ> առնչություններով խնդիրներում:

Խնդիր 1. Դասղեկի հարցին՝ «Ո՞վ է կոտրել ապակին» , դրանում կասկածվող 4 աշակերտ՝ Արամը, Բաբկենը, Գևորգը և Դավիթը, տվեցին հետևյալ պատասխանները.

Արամ. Կոտրել է Գևորգը:

Բաբկեն. Ես եմ կոտրել:

Գևորգ. Կոտրել է Բաբկենը:

Դավիթ. Ես չեմ կոտրել:

Իսկ ուսուցչի այն հարցին, թե նրացից քանի՞սն են ճիշտ ասել, այդ աշակերտներն անկեղծ պատասխանեցին՝ երկուսը:

Ո՞վ է կոտրել ապակին:

Լուծում: Քննարկենք բոլոր հնարավոր դեպքերը: Դրանք չորսն են:

Ենթադրենք, թե ապակին կոտրել է.

ա) Արամը: Այդ դեպքում կստացվի, որ Արամը, Բաբկենը և Գևորգը սխալ են ասել, ինչը հակասում է խնդրի պայմաններին (ճիշտ է երկու պատասխան):

բ) Բաբկենը: Այդ դեպքում կստացվի, որ Բաբկենը, Գևորգը և Դավիթը ճիշտ են ասել, ինչը նույնպես հակասում է խնդրի պայմաններին:

գ) Գևորգը: Այդ դեպքում ճիշտ են ասել Արամը և Դավիթը, իսկ Բաբկենը և Գևորգը՝ սխալ: Սա բավարարում է խնդրի պայմաններին: Բայց խնդրի լուծումը դրանով չի ավարտվում, քանի դեռ չի դիտարկվել վերջին հնարավոր դեպքը:

դ) Դավիթը: Ստացվում է, որ բոլորը սխալ են ասել, ինչը նույնպես հակասում է խնդրի պայմաններին:

Հետևաբար՝ ապակին կոտրել է Գևորգը:

Նշենք, որ նման եղանակով խնդիրները լուծելիս քննարկվող դեպքերի հարմար ընտրությունը և ճիշտ կազմակերպումը կկարճացնի խնդրի լուծումը:

Խնդիր 2. Շախմատի մրցաշարին մասնակցում էին Արան, Բաբկենը, Գևորգը, Դավիթը և Եղիշեն: Մրցաշարից առաջ 5 երկրպագուն կատարել էին հետևյալ կանխատեսումները.

առաջինը՝ Եղիշեն կգրավի 1-ին տեղը, իսկ Գևորգը՝ 2-րդ, երկրորդը՝ Արան կգրավի 2-րդ տեղը, իսկ Դավիթը՝ 4-րդ, երրորդ՝ Գևորգը կգրավի 3-րդ տեղը, իսկ Եղիշեն՝ 5-րդ, չորրորդ՝ Գևորգը կգրավի 1-ին տեղը, իսկ Դավիթը՝ 4-րդ, հինգերորդը՝ Արան կգրավի 2-րդ տեղը, իսկ Գևորգը՝ 3-րդ:

Մրցաշարից հետո պարզվեց, որ երկրպագուներից յուրաքանչյուրի մեկ կանխատեսումը ճիշտ էր, իսկ մյուսը՝ սխալ:

Ո՞ր տեղերն են գրավել մասնակիցները:

Լուծում: Նախորդ խնդրում քննարկվող դեպքերը խնդրի պատասխանի հնարավոր տարբերակներն էին: Քանի որ այս խնդրում դրանք չափազանց շատ են (հինգ շախմատիստ քանի՜ եղանակով կարող են տեղաբաշխվել մրցաշարային աղյուսակում), հետևաբար՝ քննարկվող դեպքերի համար կկատարենք ավելի հարմար ընտրություն:

Դիտարկենք երկու դեպք.

ա) ենթադրենք՝ առաջին երկրպագուի առաջին կանխատեսումը ճիշտ էր, իսկ երկրորդը՝ սխալ:

Այդ դեպքում Եղիշեն գրավել է 1-ին տեղը: Հետևաբար՝ ճիշտ կլինի երրորդ երկրպագուի առաջին կանխատեսումը՝ Գևորգը 3-րդն է: Հետևաբար՝ ճիշտ կլինի չորրորդ երկրպագուի երկրորդ կանխատեսումը՝ Դավիթը 4-րդն է: Ըստ հինգերորդ երկրպագուի

կանխատեսման՝ Արան 2-րդը չէ, հետևաբար՝ Արան 5-րդն է, իսկ Բաբկենին մնում է 2-րդ տեղը:

բ) եթե առաջին երկրպագուի 2-րդ կանխատեսումը լիներ Ճիշտ, այսինքն՝ Գևորգը երկրորդն է, ապա հինգերորդ երկրպագուն Ճիշտ կանխատեսում չէր ունենա: Նշանակում է՝ այս դեպքը հնարավոր չէ:

Այսպիսով՝ մրցաշարի մասնակիցները գրավել են հետևյալ տեղերը. Եղիշե՝ 1-ին, Բաբկեն՝ 2-րդ, Գևորգ՝ 3-րդ, Դավիթ՝ 4-րդ և Արա՝ 5-րդ տեղեր:

Ներկայացնենք խնդիրների լուծման աղյուսակային եղանակը, որը հարմար է կիրառել այն դեպքերում, երբ խնդրի պայմանները շատ են:

Խնդիր 3. Արմենը, Դավիթը, Միքայելը և Նարեկը հաճախում են տարբեր մարզական խմբակներ՝ բասկետբոլ, թենիս, ֆուտբոլ և վոլեյբոլ: Վոլեյբոլիստն Արմենի և Միքայելի հետ սովորում է նույն դասարանում: Արմենը և Դավիթը մարզումների են գնում միասին՝ ոտքով, իսկ թենիսիստը՝ ավտոբուսով: Ֆուտբոլիստը ծանոթ չէ ո՛չ բասկետբոլիստին և ո՛չ էլ՝ վոլեյբոլիստին: Տղաներից ո՞վ ո՞ր խմբում է պարապում:

Լուծում: Կազմենք անունների և մարզական խմբակների համապատասխան աղյուսակ, որի տողերը վերաբերում են մարզիկներին, սյուները՝ խմբակներին (տողերի քանակը հավասար է մարզիկների թվին, իսկ սյուներինը՝ մարզական խմբակներին):

Եթե որևէ մարզիկ տվյալ խմբակի անդամ չէ, ապա համապատասխան վանդակում դրվում է $-$ նշան, հակառակ դեպքում՝ $+$ նշան: Պարզ է, որ այս խնդրում Ճիշտ պայմանների դեպքում յուրաքանչյուր տողում և յուրաքանչյուր սյունակում պետք է լինի միայն մեկ $+$ նշան:

Խնդիրը նորից կարդալով՝ լրացնենք աղյուսակը:

<Վոլեյբոլիստն Արմենի և Միքայելի հետ նույն դասարանում է սովորում> պայմանից հետևում է, որ Արմենը և Միքայելը վոլեյբոլիստ չեն՝ աղյուսակի համապատասխան վանդակներում դնենք < — > նշաններ: <Արմենը և Դավիթը մարզումների են գնում ոտքով, իսկ Թենիսիստը՝ ավտոբուսով> պայմանից էլ հետևում է, որ Արմենը և Դավիթը Թենիսիստ չեն: Աղյուսակում դնենք ևս երկու < — > նշան: <Ֆուտբոլիստը ծանոթ չէ ո՛չ բասկետբոլիստին և ո՛չ էլ՝ վոլեյբոլիստին> պայմանից հետևում է, որ Արմենը և Միքայելը ֆուտբոլիստներ չեն (վոլեյբոլիստի հետ նույն դասարանում են սովորում), դնենք ևս երկու < — > նշան (տե՛ս աղյուսակ 1-ը):

	Բասկետբոլ	Թենիս	Ֆուտբոլ	Վոլեյբոլ
Արմեն		—	—	—
Միքայել			—	—
Դավիթ		—		
Նարեկ				

Աղյուսակ 1

Առաջին տողում մի վանդակ է մնում, այնտեղ դնենք < + > նշանը, իսկ այդ պյան մնացած վանդակներում՝ < — > նշան (տե՛ս աղյուսակ 2-ը):

	Բասկետբոլ	Թենիս	Ֆուտբոլ	Վոլեյբոլ
Արմեն	+	—	—	—
Միքայել	—		—	—
Դավիթ	—	—		
Նարեկ	—			

Աղյուսակ 2

Երկրորդ տողում մի վանդակ է ազատ, դնենք $< + >$ նշան:

Ֆուտբոլիստը ծանոթ չէ բասկետբոլիստին, հետևաբար՝ Դավիթը ֆուտբոլիստ չէ, քանի որ բասկետբոլիստ Արմենի հետ է գնում մարզումների: Հետևաբար՝ Դավիթը վոլեյբոլիստ է, իսկ Նարեկին մնում է միայն ֆուտբոլը (տե՛ս աղյուսակ 3-ը):

	Բասկետբոլ	Թենիս	Ֆուտբոլ	Վոլեյբոլ
Արմեն	+	—	—	—
Միքայել	—	+	—	—
Դավիթ	—	—	—	+
Նարեկ	—	—	+	—

Աղյուսակ 3

Պատասխան. Արմենը՝ բասկետբոլ, Միքայելը՝ թենիս, Դավիթը՝ վոլեյբոլ, Նարեկը՝ ֆուտբոլ:

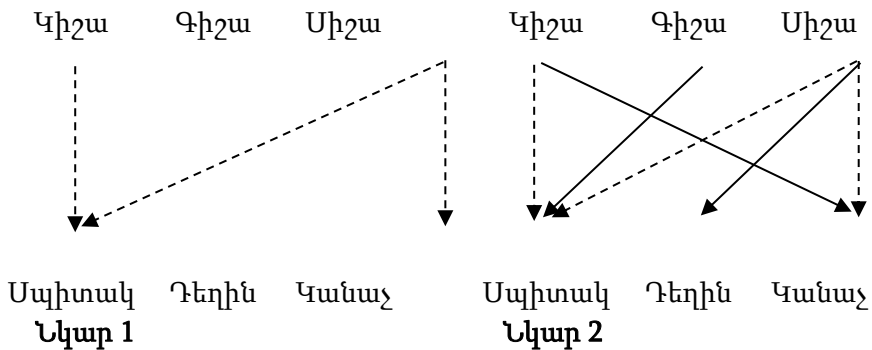
Երբեմն հարմար է խնդիրը լուծել գծապատկերի միջոցով:

Խնդիր 4. Կիշա, Գիշա, Սիշա թուրակներից մեկը դեղին գույնի է, մյուսը՝ սպիտակ, երրորդը՝ կանաչ: Կիշան և սպիտակ գույնի թուրակն ապրում են նույն վանդակում: Սիշան սիրում է խաղալ կանաչ գույնի թուրակի հետ և շատ է կռվում սպիտակ գույնի թուրակի հետ: Պարզե՛ք յուրաքանչյուր թուրակի գույնը:

Լուծում: Խնդիրը լուծենք գծապատկերի միջոցով: Գծապատկերի առաջին տողի երեք կետերը թուրակներն են, իսկ երկրորդ տողի երեք կետերը՝ գույները:

Եթե խնդրի որևէ պայմանից հետևում է, որ թուրակներից ինչ-որ մեկը որևէ կոնկրետ գույնի չէ, ապա դրանց համապատասխանող կետերը միացնենք ընդհատ գծերով: Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ Կիշան սպիտակ գույնի չէ, իսկ Սիշան ո՛չ

սպիտակ է, ո՛չ էլ՝ կանաչ: Կատարելով միացումները՝ կստանանք նկար 1-ի պատկերը:



Գծապատկերի նկար 1-ից հետևում է, որ Միշային մնում է միայն դեղին գույնը, միացնենք անընդհատ գծով: Այնուհետև Կիշային մնում է միայն կանաչ, իսկ Գիշային սպիտակ գույնը (Նկար 2):

Խնդիրներ

1-13 խնդիրներում համարե՛ք, որ ճշտախոսը միշտ ճիշտ է խոսում, իսկ ստախոսը միշտ խաբում է:

- ա) Ճշտախոսը, թե՞ ստախոսը կարող է ասել <Ես ստախոս եմ>:
բ) Ճշտախոսին երկու անգամ տվել են նույն հարցը և ստացել տարբեր՝ <այո> և <ոչ> պատասխանները: Ձևակերպե՛լ այդպիսի մի հարց:
- Ձևակերպե՛ք այնպիսի հարց.
ա) որին ճշտախոսը և ստախոսը տալիս են միևնույն (<այո> կամ <ոչ>) պատասխանը:
բ) որի <այո> կամ <ոչ> պատասխանից պարզ լինի՝ դիմացինը ճշտախոս է, թե՞ ստախոս:

3. Միասին հավաքվել են 2 ճշտախոս և 2 ստախոս: Նրանցից ո՞վ կարող է ասել.
 - ա) Մենք բոլորս ճշտախոս ենք:
 - բ) Ինձ չհաշված՝ մնացածների մեջ մեկն է ճշտախոս:
 - գ) Ինձ չհաշված՝ մնացածների մեջ ճշտախոսները շատ են, քան ստախոսները:
 - դ) Ինձ չհաշված՝ մնացածների մեջ ստախոսները շատ են, քան ճշտախոսները:
4. Ճանապարհորդն իր ուղեկցողին խնդրեց պարզել ճշտախոս՞ է, թե՞ ստախոս հեռվում կանգնածը: Ուղեկցողը եկավ և պատասխանեց. ասում է, որ ճշտախոս է:

Ճշտախոս՞ է, թե՞ ստախոս ուղեկցողը:
5. Հավաքվածներից յուրաքանչյուրը մյուսների մասին ասաց. <Դուք բոլորդ ստախոս եք>: Քանի՞ ճշտախոս կա նրանց մեջ:
6. Այն հարցին, թե իր ընկերներից քանի՞սն են ճշտախոս, երեք ընկերոջից առաջինը պատասխանեց՝ <ոչ մեկը>, երկրորդը՝ <մեկը>: Ի՞նչ պատասխանեց երրորդ ընկերը:
7. Կլոր սեղանի շուրջը նստած են 6 հոգի: Նրանցից քանի՞սն է ճշտախոս, եթե յուրաքանչյուրն ասում է.
 - ա) Աջ հարևանս ճշտախոս է:
 - բ) Աջ հարևանս ստախոս է:
 - գ) Երկու հարևաններս էլ ստախոս են:

Լուծե՛ք խնդիրը 5 հոգու դեպքում:
8. Ճշտախոսների և ստախոսների քաղաքների բնակիչները հաճախ իրար հյուր են գնում: Ի՞նչ հարցով կարող է այդ քաղաքներից մեկում հայտնված ճամփորդն այդ քաղաքների առաջին իսկ հանդիպած բնակչից պարզել, թե

ո՞ր քաղաքում է գտնվում՝ ճշտախոսների՞, թե՞ ստախոսների:

9. Չորս երեխայից յուրաքանչյուրը 7, 8 կամ 9 տարեկան է: Այն հարցին, թե նրանք միասին քանի տարեկան են, Անին պատասխանեց՝ 30, Գոռը՝ 31, Եվան՝ 28, Սուր՝ 33: Քանի՞ տարեկան է նրանցից յուրաքանչյուրը, եթե հայտնի է, որ միայն 7 տարեկաններն են սխալ հաշվում:
10. Հավաքին մասնակցում էին 50 ճշտախոսներ և ստախոսներ: Յուրաքանչյուրին տվեցին հետևյալ հարցը. <Ձեզ չհաշված՝ մյուսների մեջ ճշտախոսներն են շատ, թե՞ ստախոսները>: Երբ 25 հոգի պատասխանեցին, որ ստախոսներն են շատ, հարցադրումը դադարեցրին: Նրանցից քանի՞սն էին ճշտախոս:
11. Ճշտախոսների և ստախոսների կողմում 25 մարդ հերթ էին կանգնած: Առաջինից բացի՝ հերթի յուրաքանչյուր մարդ ասաց, թե՝ իր առջև կանգնած մարդը ստախոս է, իսկ առաջին կանգնածն ասաց, թե՝ իրենից հետո կանգնած բոլոր մարդիկ ստախոս են: Քանի՞ ստախոս կար հերթում:
12. Սենյակում կա 11 մարդ: Առաջին մարդն ասաց. <Սենյակում բոլորը ստախոս են>, իսկ երկրորդ մարդն ասաց. <Ինձնից անմիջապես առաջ խոսողը ճիշտ չի ասում>: Մնացած 9 հոգին կրկնեցին երկրորդի ասածը: Քանի՞ ճշտախոս կա սենյակում:
13. 2017 մարդկանց շարքի սկզբում և վերջում կանգնածներն ասացին. <Իմ հարևանը ստախոս է>, իսկ մնացածները՝ <Իմ հարևանները ստախոս են>: Ամենաշատը քանի՞ ճշտախոս կարող է լինել այդ շարքում:

14-17 խնդիրներում ճշտախոսներից և ստախոսներից բացի՝ կան նաև խորամանկներ, որոնք իրենց ցանկությամբ կարող են կա՛մ ճիշտ ասել, կա՛մ խաբել:

14. Արմենին, Բաբկենին և Գուրգենին, որոնցից մեկը ճշտախոս է, մյուսը՝ ստախոս, երրորդը՝ խորամանկ, տվել են նույն հարցը. <Ճշտախո՞ւ ես, ստախո՞ւ, թե՞ խորամանկ>: Հնարավո՞ր է պարզել, թե նրանցից ո՞վ է ճշտախոսը, ո՞վ՝ ստախոսը, և ո՞վ՝ խորամանկը, եթե.

ա) Արմենն ասել է՝ ես ճշտախոս եմ, Բաբկենը՝ ես ստախոս եմ, Գուրգենը՝ ես խորամանկ եմ:

բ) Արմենն ասել է՝ ես ճշտախոս չեմ, Բաբկենը՝ ես ստախոս չեմ, Գուրգենը՝ ես խորամանկ չեմ:

գ) երեքն էլ տվել են նույն պատասխանը:

15. Գիշա, Կիշա և Սիշա թուրակներից մեկը ճշտախոս է, մյուսը՝ ստախոս, իսկ երրորդը՝ խորամանկ: Այն հարցին, թե՞ <Կիշան ճշտախո՞ւ է, ստախո՞ւ, թե՞ խորամանկ>, նրանք պատասխանեցին.

Գիշա. Կիշան ստախոս է:

Կիշա. Ես խորամանկ եմ:

Սիշա. Կիշան ճշտախոս է:

Նրանցից ո՞վ է ճշտախոս, ո՞վ՝ ստախոս և ո՞վ՝ խորամանկ:

16. Ձեր առջև կանգնած են երեք ընկեր՝ ճշտախոսը, ստախոսը և խորամանկը: Նրանցից յուրաքանչյուրը գիտի, թե իր ընկերներից ո՞վ որն է: Չորս հարցով պարզել, թե նրանցից ո՞վ է ճշտախոսը, ո՞վ՝ ստախոսը, և ո՞վ՝ խորամանկը (հարցերին նրանք պետք է պատասխանեն <այո> կամ <ոչ>):

17. Երեք ընկերոջից երկուսը ճշտախոս են, մեկը՝ խորամանկ:
Երկու հարցով, որոնց նրանք պետք է պատասխանեն
<այո> կամ <ոչ>, պարզել, թե ո՞վ է խորամանկը:
18. Աննան, Բելան և Սեդան մասնակցում են տարբեր
խմբակների՝ պարի, երգի, թատրոնի: Այն հարցին, թե ո՞վ
ո՞ր խմբակին է մասնակցում, նրանք պատասխանեցին.
Աննա. – Ես՝ պարի:
Բելա. – Ես պարի խմբակում չեմ:
Գոհար. – Ես երգի խմբակում չեմ:
Ո՞վ ո՞ր խմբին է մասնակցում, եթե երեք պատասխանից
մեկը ճիշտ է, երկուսը՝ ոչ:
19. Դասղեկի այն հարցին, թե՝ ո՞վ է կոտրել պատուհանի
ապակին, դրանում կասկածվող Արամը, Հայկը և Սուրենը
տվեցին հետևյալ պատասխանները.
Արամ. – Ես չեմ կոտրել, Հայկն էլ՝ մեղավոր չէ:
Հայկ. – Արամը մեղավոր չէ, կոտրել է Սուրենը:
Սուրեն. – Ես մեղավոր չեմ, Արամն է կոտրել:
Ո՞վ է կոտրել ապակին, եթե հայտնի է, որ նրանցից մեկը
երկու անգամ ստել է, մյուսը երկու անգամ ճիշտ է ասել,
իսկ երրորդը մեկ անգամ ճիշտ է ասել և մեկ անգամ ստել:
20. Չորս ընկեր մասնակցել են վազքի մրցույթի: Այն հարցին,
թե ո՞վ ո՞ր տեղն է գրավել, նրանք պատասխանեցին.
Արմեն. – Ես երկրորդն էի, իսկ Բագրատը՝ երրորդը:
Գևորգ. – Ես երրորդն էի, իսկ Արմենը՝ առաջինը:
Դավիթ. – Ես երրորդն էի, իսկ Բագրատը՝ չորրորդը:
Ո՞ր տեղն է գրավել մարզիկներից յուրաքանչյուրը, եթե
նրանցից յուրաքանչյուրի ասածներից մեկը ճիշտ է, իսկ
մյուսը՝ սխալ:

21. «Արարատ» – «Շիրակ» ֆուտբոլային խաղից առաջ կատարվել է հինգ կանխատեսում.

ա) Ոչ ոքի չի լինի:

բ) «Շիրակի» դարպասին գոլ կխփվի:

գ) «Արարատը» կհաղթի:

դ) «Արարատը» չի պարտվի:

ե) Խաղի ընթացքում կխփվի 3 գնդակ:

Ինչպե՞ս ավարտվեց խաղը, եթե հայտնի է, որ կանխատեսումներից միայն երեքն են ճիշտ:

22. Երեք մեղադրվողներն այն հարցին, թե՞ ի՞նչ մեքենայով են հեռացել բանկի թալանից հետո, պատասխանեցին.

Առաջինը. – Կապույտ <Մերսեդեսով>:

Երկրորդը. – Սև <Աուդիով>:

Երրորդը. – Ո՛չ կապույտ <Ֆորդով>:

Հայտնի է, որ նրանցից յուրաքանչյուրը ճիշտ է ասել կա՛մ մեքենայի գույնը, կա՛մ մեքենայի տեսակը: Ի՞նչ գույնի և ի՞նչ տեսակի մեքենայով են կատարել բանկի թալանը:

23. Աշակերտը մաթեմատիկա, ֆիզիկա, քիմիա և կենսաբանություն առարկաներից ստացել է 6, 7, 8 և 9 գնահատականներ: Մաթեմատիկայի գնահատականը, չնայած՝ ամենաբարձրը չէ, բայց բարձր է ֆիզիկայի գնահատականից, իսկ կենսաբանության գնահատականն ամենացածրը չէ, բայց ցածր է մաթեմատիկայի գնահատականից: Գտե՛ք յուրաքանչյուր առարկայից աշակերտի ստացած գնահատականը:

24. Վազբի մրցույթից առաջ հինգ մասնակիցը կատարեցին հետևյալ կանխատեսումները.

Արա. – Բենիկը կգրավի 2-րդ, իսկ Գևորգը՝ 4-րդ տեղը:

Բենիկ. – Արան կգրավի 1-ին, իսկ Գևորգը՝ 4-րդ տեղը:

Գևորգ. – Բենիկը կգրավի 2-րդ, իսկ Արան՝ 3-րդ տեղը:

Դավիթ. – Ես կգրավեմ 1-ին, իսկ Երվանդը՝ 2-րդ տեղը:

Երվանդ. – Ես կգրավեմ 1-ին, իսկ Դավիթը՝ 5-րդ տեղը:

Արցույթից հետո պարզվեց, որ յուրաքանչյուրի մի կանխատեսումը ճիշտ էր, իսկ մյուսը՝ սխալ: Ո՞ր տեղը գրավեց մարզիկներից յուրաքանչյուրը:

25. Արցույթի երեք մասնակիցը կատարել էին հետևյալ կանխատեսումները.

Անի. – Ես կլինեմ 1-ինը, իսկ Եվան՝ նախավերջինը:

Էլեն. – Ես կլինեմ 1-ինը, իսկ Եվան՝ նախավերջինը:

Եվա. – Ես կլինեմ 1-ինը, իսկ Անին՝ վերջինը:

Արցույթից հետո պարզվեց, որ նրանց բոլոր կանխատեսումներից երեքն էին ճիշտ:

Ո՞ր տեղը գրավեց նրանցից յուրաքանչյուրը:

26. Միջազգային կոնֆերանսին հանդիպեցին չորս գիտնական, որոնցից յուրաքանչյուրը գիտի ռուսերենից, անգլերենից, ֆրանսերենից և գերմաներենից երկուսը: Նրանցից ոչ մեկը միաժամանակ ֆրանսերենին և գերմաներենին լեզուներին չի տիրապետում: Չնայած առաջին գիտնականը ռուսերեն չգիտի, բայց թարգմանիչ է երկրորդ և երրորդ գիտնականների համար: Երրորդ գիտնականը գիտի գերմաներեն, իսկ չորրորդը՝ ոչ, բայց զրուցում են անգլերեն: Առաջին, երկրորդ և չորրորդ գիտնականներն ընդհանուր լեզու չգիտեն: Ի՞նչ լեզվով է չորրորդ գիտնականը զրուցում մյուսներից յուրաքանչյուրի հետ:

27. Ուսուցիչը գրատախտակին գրեց մի քառանիշ թիվ, որի թվանշաններն իրարից տարբեր են և հավասար չեն 0-ի: Արամն այդ թվի մասին ասաց. <Այդ թվի երկրորդ թվանշանն ամենամեծն է և հավասար է թվի մյուս երեք թվանշանների գումարին>: Դավիթն ասաց. <Այդ թվի երկրորդ թվանշանը փոքր չէ 3-ից, իսկ առաջին թվանշանը բաժանվում է այդ թվի մյուս թվանշաններից յուրաքանչյուրին>: Հայտնի է, որ աշակերտներից մեկի բոլոր ասածները ճիշտ են, իսկ մյուսինը՝ սխալ: Ո՞ր թիվն է գրված գրատախտակին:
28. Արամը, Մերին, Սոնան, Դավիթը և Եվան հերթ են կանգնել: Արամը կանգնած է Մերիից առաջ, բայց Եվայից հետո: Սոնան և Եվան հարևաններ չեն: Եվան, Արամը և Սոնան Դավիթի կողքին չեն: Ի՞նչ հերթականությամբ են նրանք կանգնած:
29. Աշակերտը փնտրում էր իրերը՝ գրիչը, մատիտը, քանոնը և ռետինը: Դրանք գտնվում էին պայուսակում, սեղանի վրա, սեղանի տակ, գրպանում: Քանոնը և ռետինը սեղանի տակ չէին: Գրիչը սեղանի տակ չէր, ոչ էլ՝ գրպանում: Քանոնը ո՛չ սեղանի վրա էր, ո՛չ էլ՝ գրպանում: Ո՞ր իրը որտե՛ղ էր դրված:
- 30*. 10 քարտի վրա կատարված են հետևյալ գրառումները. «Ձախում դրված քարտերից ճիշտ 1 քարտի վրա գրվածը սխալ է», «Ձախ դրված քարտերից ճիշտ 2 քարտի վրա գրվածը սխալը է» և այդպես շարունակ: Քարտերն ինչ-որ հերթականությամբ դասավորված են շարքով: Ամենաշատը քանի՞ քարտի վրայի գրվածը կարող է ճիշտ լինել:

Թեմա 5. Կշռում

Կշռման խնդիրները դասվում են մաթեմատիկայում հայտնի գլուխկոտրուկներ խնդիրների շարքը: Կշռման խնդիրները մեծ դեր ունեն աշակերտների շրջանում մտավոր գործունեություն ծավալելու գործում: Անշուշտ, դրանք կօգնեն զարգացնել աշակերտի մտքի ճկունությունը, մտավոր գործունեությունը, տրամաբանությունը և կնպաստեն աշակերտների գործնական հմտություններ ձեռք բերելու գործընթացին:

Կշռման խնդիրը նմանատիպ (արտաքնուստ չտարբերվող) առարկաների համախմբում այլ հատկությամբ օժտված, մնացածից տարբերվող առարկայի հայտնաբերելն է <կշռման> միջոցով, իսկ <կշռումը> խնդրում ձևակերպված գործողություն է, որը հնարավորություն է տալիս առարկաների որևէ խմբում ստուգելու փնտրվող առարկայի առկայությունը:

Կշռման խնդիրը սովորաբար չունի որոշակի պատասխան: Յուրաքանչյուր կշռման խնդիր ունի պատասխանի հնարավոր տարբերակներ: Խնդիրը լուծելիս առաջին հերթին պետք է հաշվել դրանց քանակը:

Ամեն կշռում հնարավորություն է ընձեռում բացառելու խնդրի հնարավոր պատասխանների որոշ տարբերակներ:

Լուծել կշռման խնդիրը նշանակում է՝ գտնել կշռումների մի խումբ, որոնց արդյունքների տարբեր համադրություններով միարժեքորեն ստացվում են խնդրի պատասխանի հնարավոր տարբերակներից յուրաքանչյուրը:

Կշռման գործընթացը կազմակերպվում է այնպես, որ ամեն կշռումից (գործողության մեկ քայլ) հետո պատասխանի

հնարավոր տարբերակների քանակը գրեթե կա՛մ կիսվում է, կա՛մ եռատվում: Ասվածն ավելի հասկանալի կլինի կիսման և եռատման մեթոդները ուսումնասիրելիս:

I. Կիսման մեթոդ

Կիսման մեթոդը կիրառում են այն խնդիրները լուծելիս, որոնցում ամեն գործողություն (<կշռում>) ունի երկու հնարավոր ելք:

Լուծենք հետևյալ խնդիրը.

Խնդիր 1: Աշակերտը մտապահել է 1-ից մինչև 8-ը (ներառյալ) թվերից մեկը: Երեք հարցով գտե՛ք աշակերտի մտապահած թիվը, եթե հայտնի է, որ տրված հարցերին աշակերտը կարող է պատասխանել <այո> կամ <ոչ>:

Առաջին լուծում: Նման խնդիրների լուծման փորձ չունեցող կամ տեսականորեն անպատրաստ աշակերտը կարող է սկսել տարբեր ոչ տրամաբանական հարցադրումներ անել, մինչև անգամ՝ սկսել <մտապահված թիվը 3-ն է՞> հարցից: Եվ եթե պատահականորեն դա համընկնի մտապահված թվի հետ, կկարծի, թե ինքը մեկ հարցով խնդիրը <լուծել> է:

Խնդրի լուծումը պետք է սկսել խնդրի պատասխանի հնարավոր տարբերակների քանակի ճշտումով: Խնդիրն ունի պատասխանի ութ հնարավոր տարբերակ. մտապահված թիվը 1-ն է, մտապահված թիվը 2-ն է, և այդպես շարունակ՝ մինչև մտապահված թիվն 8-ն է: Ամեն հարց (կշռում) ունի պատասխանի երկու հնարավոր տարբերակ՝ <այո> կամ <ոչ> (երկու ելք): Հետևաբար՝ խնդիրը կլուծենք կիսման մեթոդով: Այսինքն՝ մտապահողին պետք է դիմել այնպիսի հարցով, որ խնդրի պատասխանի ութ հնարավոր արժեքներից չորսի դեպքում նրա պատասխանը լինի <այո>, իսկ մյուս չորսի դեպքում՝ <ոչ>:

Օրինակ՝ <Մտապահված թիվը մե՞ծ է 4-ից > հարցին <այո> պատասխանի դեպքում մտապահված կարող է լինել 5, 6, 7, 8 թերից մեկը: Խնդրի լուծումը շարունակենք հենց այդ պատասխանի դեպքում: Նկատենք, որ առաջին հարցի պատասխանից հետո խնդրի պատասխանների 8 հնարավոր տարբերակներից մնացել են չորսը՝ 5, 6, 7, 8: Դրանց քանակը կիսելու նպատակով հարմար է հետևյալ հարցը. <Մտապահված թիվը մե՞ծ է 6-ից >: Աշակերտի <այո> պատասխանի դեպքում խնդրի պատասխանը կարող է լինել 7 կամ 8, իսկ <ոչ>-ի դեպքում՝ 5 կամ 6: <Ոչ> պատասխանի դեպքում երրորդ հարցն ավելի ակնհայտ է. <Արդյո՞ք մտապահված թիվը 5-ն է>, որի <ոչ> պատասխանի դեպքում մտապահված թիվը կլինի 6-ը:

Խնդրի լուծման հիմքում ընկած էր այն սկզբունքը, որ յուրաքանչյուր հարցի դեպքում խնդրի պատասխանի հնարավոր տարբերակների կեսի համար ստանում ենք <այո>, իսկ մյուս կեսի համար՝ <ոչ> պատասխանը: Նշենք նաև, որ հարցադրումները կարող են լինել տարաբնույթ, օրինակ՝ <Մտապահված թիվը գու՞յգ է>, կամ <6-ը բաժանվո՞ւմ է մտապահված թվին> և այլն:

Նկատենք, որ առաջին լուծման ընթացքում երկրորդ հարցը որոշվեց առաջին հարցի պատասխանն ստանալուց հետո, իսկ երրորդ հարցը որոշվում է առաջին և երկրորդ հարցերի պատասխաններն ունենալուց հետո:

Ներկայացնենք լուծման մի եղանակ, որում երեք հարցերը տրվում են միանգամից, և այնուհետև, ունենալով դրանց պատասխանները՝ որոշում մտապահված թիվը:

Երկրորդ լուծում: Հետևյալ աղյուսակի յուրաքանչյուր սյան 1-ին, 2-րդ և 3-րդ տողերում գրված են մտապահողին տրվող երեք

հարցերի պատասխանների բոլոր հնարավոր տարբերակները:
Դրանց քանակը հավասար է 8-ի;

Աղյուսակի 4-րդ տողում գրենք խնդրի պատասխանի (մտապահած թվի) բոլոր հնարավոր արժեքները՝ ցանկացած հերթականությամբ: Դրանք նույնպես 8 հատ են:

1-ին հարց	այո	այո	այո	այո	ոչ	ոչ	ոչ	ոչ
2-րդ հարց	այո	այո	ոչ	ոչ	այո	այո	ոչ	ոչ
3-րդ հարց	այո	ոչ	այո	ոչ	այո	ոչ	այո	ոչ
մտապահված թիվ	1	2	3	4	5	6	7	8

Հարցադրման ձևը պարզեցնելու նպատակով՝ յուրաքանչյուր հարցի թվերը գրենք մեկ քարտի վրա: Առաջին քարտի վրա գրենք առաջին տողում <այո> պարունակող սյուների վերջին (4-րդ) տողի թվերը: Նույն ձևով լրացնենք երկրորդ և երրորդ քարտերը, կունենանք.

1-ին քարտ՝ 1, 2, 3, 4

2-րդ քարտ՝ 1, 2, 5, 6

3-րդ քարտ՝ 1, 3, 5, 7

Եվ եթե մտապահողը պատասխանի այն հարցերին, թե արդյոք իր թիվը գրված է 1-ին, 2-րդ, 3-րդ քարտերին, ապա միարժեքորեն կգտնվի մտապահված թիվը:

Օրինակ. <ոչ>, <այո>, <ոչ> պատասխանի դեպքում մտապահված թիվը կլինի 6-ը:

Նշենք, որ, աղյուսակի վերջին տողում թվերի տեղերը փոխելով՝ կստանանք քարտերի այլ տարբերակներ:

Լուծման այս եղանակը պատասխանում է մի կարևոր հարցի. Հնարավո՞ր է արդյոք երեք հարցով գտնել մտապահված թիվը,

Եթե դա 1-ից մինչև 9 ներառյալ թվերից մեկն է: Իհա՛րկե, ոչ քանի որ այդ դեպքում ունենք խնդրի պատասխանի 9 հնարավոր տարբերակ, իսկ երեք հարցերին՝ աշակերտի <այո> կամ <ոչ> պատասխանելու 8 տարբերակ:

Նկատենք, որ n հարցերին աշակերտի տված բոլոր հնարավոր պատասխանների քանակը հավասար է 2^n -ի (բացատրենք, ինչո՞ւ): Դիցուք խնդրի պատասխանների բոլոր հնարավոր տարբերակների քանակը հավասար է m -ի: Եթե $m > 2^n$, ապա խնդիրը լուծում չի ունենա: Նկատենք նաև, որ խնդիրը կլուծվի n հարցով, և հնարավոր չի լինի լուծել $(n - 1)$ հարցով, եթե $2^{n-1} < m \leq 2^n$:

Խնդիրներ

1-12 խնդիրներում հարցերի բովանդակությունը որոշում է խնդիրը լուծողը: Դրանք պետք է լինեն մաթեմատիկական բնույթի: Հարցերն ուղղված են խնդիրներում մտապահողին (խաղընկեր, աշակերտ և այլն), ընդ որում՝ նա կարող է հարցերին տալ միայն «այո» կամ «ոչ» պատասխան:

1. Աշակերտը մտապահել է 1, 2, 3, 4 և 5 թվերից մեկը: Ապացուցե՛ք, որ երկու հարցով հնարավոր չէ գտնել նրա մտապահած թիվը:
2. ա) Աշակերտը մտապահել է 1-ից մինչև 16 թվերից մեկը: Չորս հարցով գտե՛ք մտապահված թիվը:
 բ) Կարելի՞ է արդյոք չորս հարցով գտնել մտապահած թիվը, եթե դա 1-ից մինչև 17-ը թվերից մեկն է:
 գ) Ամենաքիչը քանի՞ հարցով կարելի է գտնել մտապահած թիվը, եթե 1-ից մինչև 32 թվերից մեկն է:
3. Աշակերտը մտապահել է 50-ից փոքր և 3-ի բազմապատիկ որևէ թիվ: Չորս հարցով գտե՛ք նրա մտապահած թիվը:

4. Աշակերտը մտապահել է երկու բնական թիվ: Գտե՛ք նրա մտապահած թվերը.
 - ա) երկու հարցով, եթե հայտնի է, որ այդ թվերի արտադրյալը 30 է,
 - բ) երեք հարցով, եթե հայտնի է, որ այդ թվերի արտադրյալը 120 է:
- 5*. Աշակերտը մտապահել է մեկ կենսո և մեկ զույգ թիվ: Հինգ հարցով գտե՛ք մտապահած թիվը, եթե հայտնի է, որ այդ թվերը չեն գերազանցում. ա) 9-ը, բ) 10-ը, գ) 11-ը:
6. Արան մտապահել է 1, 2, 3 և 4 թվերից որևէ մեկը: Կարենը գրատախտակին գրում է երկու թիվ՝ a և b, իսկ Արան այդ թվերից յուրաքանչյուրի համար առանձին-առանձին պետք է պատասխանի այն հարցին, թե՛ բաժանվո՞ւմ է արդյոք այդ թիվն իր մտապահած թվին: Կարո՞ղ է արդյոք Կարենը այդպես գտնել Արայի մտապահած թիվը:
- 7*. Աշակերտը մտապահել է 1-ից 8 թվերից մեկը: Ուսուցիչը գրատախտակին գրում է երեք թիվ՝ a, b և c, իսկ աշակերտն այդ թվերից յուրաքանչյուրի համար առանձին-առանձին պետք է պատասխանի այն հարցին, թե՛ բաժանվո՞ւմ է արդյոք այդ թիվն իր մտապահած թվին: Ո՞ր թվերն էր գրել ուսուցիչը, եթե հայտնի է, որ աշակերտի ցանկացած մտապահած թվի դեպքում ուսուցիչը կարողանում է այդ թիվը գտնել:
8. Աշակերտը մտապահել է 8x8 շախմատի տախտակի որևէ վանդակ: 6 հարցով գտե՛ք աշակերտի մտապահած դաշտը:
9. Ինը հարցով գտե՛ք աշակերտի ծննդյան օրը (ամիսը և ամսաթիվը):

10. Բառարանը բաղկացած է 125 էջից՝ յուրաքանչյուրում 60 բառ: Աշակերտը մտապահել է բառարանից որևէ բառ: 13 հարցով գտե՛ք աշակերտի մտապահած բառը:
- 11*. Բառարանը բաղկացած է 80 էջից, որոնցից յուրաքանչյուրում կա 50 բառ: Աշակերտը մտապահել է այդ բառարանի բառերից մեկը: Ամենաքիչը քանի՞ հարցով և ինչպե՞ս կարելի է գտնել աշակերտի մտապահած բառը:
- 12*. Աշակերտը մտապահել է 1, 2, 3 թվերից որևէ մեկը: Պահանջվում է մեկ հարցով գտնել մտապահված թիվը: Ի՞նչ հարց պետք է տալ աշակերտին, որ նա ունենա պատասխանելու երեք տարբերակ՝ «այո», «ոչ» կամ «չգիտեմ»:
- 13*. 8 քարտերի վրա գրել են այնպիսի բնական թվեր, որ 250-ը չգերազանցող ցանկացած բնական թիվ կամ գրված է այդ քարտերից մեկի վրա կամ հավասար է մի քանիսի վրա գրված թվերի գումարին: Ո՞ր թվերն են գրել:

II. Եռատում

Եռատման մեթոդով լուծվում են այն խնդիրները, որոնց դեպքում ամեն մի կշռում ունի երեք ելք (թեթև, ծանր և հավասար):

Ներկայացնենք եռատման խնդիր:

Խնդիր 1: 9 մետաղադրամից մեկը կեղծ է՝ թեթև է իսկական մետաղադրամից: Նժարավոր կշեռքի երկու կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը:

Առաջին լուծում: Կշեռքի նժարներին դնենք երեքական մետաղադրամ: Եթե կշեռքը հավասարակշռված է, ապա կեղծն այն երեք մետաղադրամից մեկն է, որոնք չեն մասնակցել առաջին կշռմանը: Իսկ եթե կշեռքը հավասարակշռված չէ, ապա կեղծ մետաղադրամը կլինի առաջին կշռման թեթև նժարի վրա: Երկու դեպքում էլ մենք գտնում ենք մետաղադրամների մի եռյակ, որում գտնվում է կեղծ մետաղադրամը: Երկրորդ կշռումով, եթե նժարների վրա դնենք այդ եռյակից մեկական դրամ, ապա կգտնենք կեղծ մետաղադրամը:

Նկատենք, որ այս խնդրի պատասխանի բոլոր հնարավոր արժեքների քանակը յուրաքանչյուր կշռումով պակասում է 3 անգամ: Սկզբում կեղծ մետաղադրամը կարող էր լինել 9 մետաղադրամներից որևէ մեկը, իսկ մեկ կշռումից հետո՝ 3 մետաղադրամներից որևէ մեկը:

Այս խնդրում ևս կարող ենք երկրորդ կշռումը կատարել՝ հաշվի չառնելով առաջին կշռման արդյունքը:

Երկրորդ լուծում: Նկարագրենք աղյուսակի միջոցով:

1-ին կշռում	<	<	<	=	=	=	>	>	>
2-րդ կշռում	<	=	>	<	=	>	<	=	>
Թեթև մետաղադրամ	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Աղյուսակի յուրաքանչյուր սյան առաջին և երկրորդ տողերում գրված են երկու կշռումների արդյունքների բոլոր հնարավոր տարբերակները: Դրանց քանակը հավասար է 9-ի: Աղյուսակի երրորդ տողում գրված են խնդրի պատասխանի բոլոր հնարավոր տարբերակները (կեղծ մետաղադրամն 1-ինն է, 2-րդը և այլն, 9-րդն է): Դրանց քանակը նույնպես հավասար է 9-ի: Հետևաբար՝ խնդիրը լուծելի է (օրինակ՝ եթե մետաղադրամների քանակը լիներ 10, խնդիրը չէր լուծվի, որովհետև երկու կշռումների բոլոր հնարավոր ելքերի քանակը հավասար է 9-ի):

$<, > \text{ և } =$ նշաններից յուրաքանչյուրին վերագրենք երկու նշանակություն: Վանդակում գրված $<$ նշանը նշանակում է. առաջին՝ որ այդ նույն սյան վերջին տողում գրված համարով մետաղադրամը դրված է ձախ նժարին, և երկրորդ՝ որ ձախ նժարը թեթև է աջ նժարից:

$>$ նշանը նշանակում է. առաջին՝ որ այդ նույն սյան վերջին տողում գրված համարով մետաղադրամը դրված է աջ նժարին, և երկրորդ՝ որ ձախ նժարը ծանր է աջ նժարից:

$=$ նշանը նշանակում է. առաջին՝ որ այդ նույն սյան վերջին տողում գրված համարով մետաղադրամը դրված չէ կշեռքին, և երկրորդ՝ որ կշեռքը հավասարակշռված է:

Կատարենք հետևյալ երկու կշռումները:

Յուրաքանչյուր կշռում կատարելիս ձախ նժարին դնենք $<$ -ի նշանին համապատասխանող մետաղադրամները, իսկ աջ նժարին $>$ -ի նշանին համապատասխանողները: Հարմար է նույնացնել մետաղադրամը ձախ նժարին է $<$ -ի նշանի հետ, աջ նժարին է՝ $>$ -ի նշանի հետ, իսկ մետաղադրամը կշեռքին չէ՝ $=$ նշանի հետ: Այսինքն. 1-ին կշռում. ձախ նժարին՝ 1, 2, 3, աջ նժարին՝ 7, 8, 9:

2-րդ կշռում. ձախ նժարին՝ 1, 4, 7, աջ նժարին՝ 3, 6, 9:

Եվ, կշռումների ելքերից կախված՝ կգտնենք կեղծ մետաղադրամը (բացատրենք, թե ինչպե՛ս):

Աղյուսակային լուծումով ներկայացնենք բարդ խնդիրներից մեկը՝ Սալադիհի խնդիրը (**խնդիր 33**):

Լուծում: Խնդրի պատասխանի հնարավոր արժեքների քանակը հավասար է 24-ի (12 մետաղադրամից յուրաքանչյուրը կարող է լինել թեթև կամ ծանր): Յուրաքանչյուր կշռում կարող է ունենալ երեք ելք ($<$, $>$ **և** $=$), հետևաբար՝ երեք կշռումների բոլոր հնարավոր ելքերի քանակը կլինի՝ $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$:

Բայց 27 տարբերակից պետք է ընտրել 12-ը (մետաղադրամների թվի չափ) այնպես, որ դրանք բավարարեն հետևյալ պայմանին.

ա) յուրաքանչյուր մետաղադրամ գոնե մեկ անգամ պետք է լինի նժարին (հակառակ դեպքում չեն կարող իմանալ՝ նա ծանր է, թե՞ թեթև).

բ) կշռման յուրաքանչյուր տողում $<$ **և** $>$ նշանների քանակները պետք է լինեն հավասար (քանի որ աջ և ձախ նժարներին պետք է լինեն հավասար քանակով մետաղադրամներ).

գ) մետաղադրամների որևէ զույգ չի կարող բոլոր երեք կշռումների ընթացքում լինել տարբեր նժարների վրա (նույն նժարին), կամ մեկ-երկու անգամ լինել տարբեր նժարների վրա (նույն նժարին), իսկ մնացած դեպքերում՝ միաժամանակ չլինել կշեռքին, քանի որ, եթե կեղծ մետաղադրամը լինի դրանցից մեկը, ապա հնարավոր չի լինի պարզել՝ նրանցից թեթևն է կեղծը, թե՞ ծանրը):

Հաշվի առնելով այդ պայմանները և նախորդ խնդրում $<$, $>$ և $=$ նշաններին արված վերագրումները՝ կազմենք հնարավոր աղյուսակներից մեկը.

1-ին կշռում	<	<	<	<	=	=	=	=	>	>	>	>
2-րդ կշռում	=	=	<	>	=	>	>	<	<	=	<	>
3-րդ կշռում	<	>	>	=	>	<	=	<	<	=	>	=
Կեղծ մետաղադրամ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Հետևաբար՝ կարելի է կատարել հետևյալ կշռումները.

1-ին կշռում. ձախ նժար՝ 1, 2, 3, 4, աջ նժար՝ 9, 10, 11, 12,

2-րդ կշռում. ձախ նժար՝ 3, 8, 9, 11, աջ նժար՝ 4, 6, 7, 12,

3-րդ կշռում. ձախ նժար՝ 1, 6, 8, 9, աջ նժար՝ 2, 3, 5, 11:

Օրինակ՝ եթե կշռումներն ունեցել են $>$, $<$, $>$ ելքերը, ապա կեղծը 11-րդ մետաղադրամն է, որը թեթև է իսկականից, իսկ հակառակ ելքերի ($<$, $>$, $<$) դեպքում՝ կեղծը 11-րդ մետաղադրամն է և ծանր է իսկականից:

Խնդիրներ

Խնդիրներում համարում ենք, որ.

ա) կեղծ մետաղադրամն իսկական մետաղադրամից արտաքուստ չտարբերվող, բայց կշռով ավելի ծանր կամ թեթև մետաղադրամ է:

բ) կշռել՝ նշանակում է նժարավոր կշեռքով մետաղադրամների մի խմբի կշիռը համեմատել մետաղադրամների մեկ այլ խմբի կշռի հետ (ծանր, թեթև կամ հավասար):

գ) բոլոր մետաղադրամները համարակալված են՝ միմյանցից տարբերելու համար:

14. Երեք մետաղադրամից մեկը կեղծ է: Գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը՝ կատարելով.
- ա) մեկ կշռում, եթե հայտնի է, որ կեղծ մետաղադրամը ծանր է իսկականից,
 - բ) երկու կշռում, և պարզե՛ք, ծա՞նր է, թե՞ թեթև՝ իսկականից:
15. Չորս մետաղադրամից մեկը կեղծ է: Ունենք ևս մեկ մետաղադրամ, որն իսկական է: Երկու կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը և պարզե՛ք՝ ծա՞նր է, թե՞ թեթև:
- 16*. Չորս մետաղադրամից մեկը կեղծ է, սակայն հայտնի չէ՝ ծա՞նր է, թե՞ թեթև է իսկականից: Ապացուցե՛ք, որ, ընդամենը երկու կշռում կատարելով, հնարավոր չէ գտնել կեղծ մետաղադրամը:
- 17*. Հինգ մետաղադրամից երկուսը կեղծ են, ընդ որում դրանք կշռով կարող են իրարից էլ տարբերվել: Ամենաքիչը քանի՞ կշռումով կարելի է գտնել գոնե մեկ իսկական մետաղադրամ:
18. Յոթ մետաղադրամներից մեկը կեղծ է՝ թեթև է իսկականից: Երկու կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը: Լուծե՛ք նույն խնդիրն ութ մետաղադրամի դեպքում:
19. Ութ մետաղադրամից մեկը հնարավոր է, որ լինի կեղծ՝ իսկականից թեթև: Երկու կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը կամ ապացուցել, որ բոլորն իսկական են:
20. 55 մետաղադրամից մեկը կեղծ է: Երկու կշռումով պարզե՛ք՝ կեղծ մետաղադրամը ծա՞նր է, թե՞ թեթև՝ իսկականից:
21. 9 մետաղադրամից մեկը կեղծ է՝ ծանր է իսկականից: Կատարվել է երկու կշռում: Առաջին կշռում կատարելիս ժամանակ մի նժարին դրվել է 1, 3, 5, իսկ մյուսին՝ 2, 4, 6 մետա-

- դադրամները: Երկրորդ կշռում կատարելիս մի նժարին դրվել է 1, 4, 8, իսկ մյուսին՝ 2, 5, 7 մետաղադրամները: Հնարավո՞ր է արդյոք այդ երկու կշռումների արդյունքներով գտնել կեղծ մետաղադրամը:
- 22.** 10 մետաղադրամից մեկը կեղծ է՝ թեթև է իսկականից: Ապացուցե՛ք, որ երկու կշռումով հնարավոր չէ գտնել կեղծ մետաղադրամը:
- 23.** n մետաղադրամից մեկը կեղծ է՝ թեթև է իսկականից: Երեք կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը, եթե.
- ա) $n=27$, բ) $n=25$, գ) $n=20$:
- 24.** Մետաղադրամների խմբում կա մեկ կեղծ մետաղադրամ, որը ծանր է իսկականից: Ամենաշատը քանի՞ մետաղադրամ կարող է լինել այդ խմբում, որ հնարավոր լինի 4 կշռումով գտնել կեղծ մետաղադրամը:
- 25-29 խնդիրներում տարբեր արժողությամբ իսկական մետաղադրամները կշռով նույնպես տարբեր են:
- 25.** 7 հատ 100 դրամանոց և 2 հատ 200 դրամանոց մետաղադրամներից մեկը կեղծ է՝ թեթև է նույն արժողությամբ իսկական մետաղադրամից: Երկու կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը:
- 26.** n հատ 100 դրամանոց և 9- n հատ 200 դրամանոց մետաղադրամներից մեկը կեղծ է՝ ծանր է նույն արժողության իսկական մետաղադրամից: Երկու կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը, եթե. ա) $n=8$, բ) $n=6$, գ) $n=5$:
- 27.** 5 հատ 100, 3 հատ 200 և 1 հատ 500 դրամանոց մետաղադրամներից մեկը կեղծ է՝ թեթև է իսկականից: Երկու կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը:

- 28.** 5 հատ 200 և 4 հատ 500 դրամանոց մետաղադրամներից մեկը կեղծ է: Հայտնի է, որ եթե կեղծը 200 դրամանոց է, ապա թեթև է իսկականից, իսկ եթե 500 դրամանոց է, ապա ծանր է իսկականից: Երկու կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը:
- 29.** 27 մետաղադրամի խմբում, որոնց մի մասը 100 դրամանոց է, իսկ մնացածը՝ 200 դրամանոց, կա մեկ կեղծ մետաղադրամ: Երեք կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը, եթե հայտնի է, որ.
- ա) կեղծ մետաղադրամը ծանր է նույն արժողությամբ իսկական մետաղադրամից,
- բ) եթե կեղծ մետաղադրամը 100 դրամանոց է, ապա ծանր է իսկական 100 դրամանոցից, իսկ եթե կեղծը 200 դրամանոց է, ապա թեթև է իսկական 200 դրամանոցից:
- 30.** 1 գ, 2 գ, 3 գ և 4 գ պիտակներով կշռաքարերից մեկի իրական կշիռը չի համապատասխանում պիտակի վրա կատարված նշումին (կա՛մ ծանր է, կա՛մ թեթև է): Երկու կշռումով գտե՛ք կեղծ կշռաքարը և պարզել՝ թեթև՞ է, թե՞ ծանր:
- 31*.** 1 գ, 2 գ, 3 գ, . . . , 9 գ պիտակներով կշռաքարերից մեկը կեղծ է՝ ծանր կամ թեթև է պիտակի վրա կատարված նշումի համեմատ: Երեք կշռումով գտե՛ք կեղծ կշռաքարը:
- 32*.** 9 մետաղադրամից մեկը կեղծ է: Կատարվել է երեք կշռում: Առաջին կշռումը կատարելիս կշեռքի մի նժարին դրվել են 1, 3, 5, իսկ մյուսին՝ 2, 4, 6 մետաղադրամները: Երկրորդ կշռում կատարելիս կշեռքի մի նժարին դրվել են 1, 4, 8, մյուսին՝ 2, 5, 7, իսկ երրորդի դեպքում՝ մի նժարին 1, 6, 9, մյուսին՝ 3, 8, 7 մետաղադրամները: Հնարավո՞ր է արդյոք այդ երեք կշռումների արդյունքով միշտ գտնել կեղծ մետաղադրամը և պարզել՝ ծա՞նր է, թե՞ թեթև իսկական մետաղադրամից:

Գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը կշռումների արդյունքների բոլոր հնարավոր դեպքերում:

33*. Սալադինի խնդիրը: 12 մետաղադրամից մեկը կեղծ է: Երեք կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը և պարզել ծա՞նր է, թե՞ թեթև իսկականից:

34*. 13 մետաղադրամից մեկը կեղծ է: Երեք կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը (չի պահանջվում պարզել՝ թեթև՞ է, թե՞ ծանր՝ իսկականից):

35*. 13 մետաղադրամից մեկը կեղծ է: Առանձին կա նաև մեկ իսկական մետաղադրամ: Երեք կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամը և պարզել՝ ծա՞նր է, թե՞ թեթև է իսկականից:

36*. 14 մետաղադրամից մեկը կեղծ է: Առանձին կա նաև մեկ իսկական մետաղադրամ: Երեք կշռումով գտնել կեղծ մետաղադրամը (չի պահանջվում պարզել՝ ծա՞նր է, թե՞ թեթև է իսկականից):

37-40 խնդիրներում կշռում կատարում են մեկ նժարով և ցուցմունքով կշեռքի վրա (սովորական կշեռք):

37. 10 պարկից յուրաքանչյուրում կա 15-ական մետաղադրամ: Հայտնի է, որ պարկերից մեկում բոլոր մետաղադրամները կեղծ են, իսկ մնացածներում՝ իսկական: Իսկական մետաղադրամը կշռում է 10 գ, իսկ կեղծը՝ 9 գ: Մեկ նժարով և ցուցմունքով կշեռքի մեկ կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամներով պարկը:

38*. 7 պարկից յուրաքանչյուրում կա 100-ական մետաղադրամ: Հայտնի է, որ պարկերից մի քանիսում բոլոր մետաղադրամները կեղծ են, իսկ մյուսներում՝ իսկական: Իսկական մետաղադրամը կշռում է 10 գ, իսկ կեղծը՝ 9 գ: Մեկ նժարով և ցուցմունքով կշեռքի մեկ կշռումով գտե՛ք կեղծ մետաղադրամներով բոլոր պարկերը:

39*. Հայտնի է, որ 4 միատեսակ գնդերից մեկը կշռում է 101 գ, երկրորդը՝ 102 գ, երրորդը՝ 103 գ, և վերջինը՝ 105 գ: Նրանց կշիռը ցույց տվող պիտակները կորել են: Երկու կշռումով գտե՛ք յուրաքանչյուր գնդի կշիռը:

40*. n պարկից յուրաքանչյուրում կա 20 մետաղադրամ: Իսկական մետաղադրամը կշռում է 10 գ: Հայտնի է, որ պարկերից մեկում բոլոր մետաղադրամները 9 գ են, իսկ մեկ այլ պարկում՝ 8 գ: Պահանջվում է մեկ կշռումով պարզել, թե յուրաքանչյուր պարկում ինչպիսի՞ մետաղադրամներ են լցված: Լուծե՛ք խնդիրը՝

ա) $n=2$, բ) $n=3$, գ) $n=4$, դ) $n=5$ դեպքերում:

Թեմա 6. Թվերի բաժանելիության հատկությունները .

Ինչպես գիտեք՝ բնական թվերի բաժանման արդյունքը միշտ չէ, որ բնական թիվ է:

Եթե a բնական թիվը m բնական թվին բաժանելիս ստանում ենք բնական թիվ է, ապա ասում ենք, որ a -ն բաժանվում է m -ի: Այդ դեպքում a -ն կոչվում է m -ի բազմապատիկ, իսկ m -ը՝ a -ի բաժանարար:

Օրինակ. Քանի որ $24 : 8 = 3$, ասում ենք, որ 24-ը բաժանվում է 8-ի, 24-ը՝ 8-ի բազմապատիկ է, իսկ 8-ը՝ 24-ի բաժանարար, և կարող ենք գրել, որ՝ $24 = 8 \cdot 3$:

Հարմար է հետևյալ սահմանումը. Ասում ենք, որ a ամբողջ թիվը բաժանվում է m բնական թվին, եթե գոյություն ունի այնպիսի k ամբողջ թիվ, որ $a = m \cdot k$: Դա ընդունված է գրել նաև այսպես՝ $a : m$:

Քանի որ $a = a \cdot 1$, ապա կարող ենք գրել, որ՝ $a : a$ և $a : 1$, իսկ $0 = m \cdot 0$ հավասարությունից՝ $0 : m$:

Ներկայացնենք ամբողջ թվերի բաժանելիության մի քանի հատկություն:

Հատկություն 1. Եթե a և b թվերը բաժանվում են m -ի, ապա $a + b$ և $a - b$ թվերը նույնպես բաժանվում են m -ի:

Ապացուցում: Իրո՛ք, եթե a և b թվերը բաժանվում են m -ի, ապա գոյություն ունեն այնպիսի k_1 և k_2 թվեր, որ $a = m \cdot k_1$ և $b = m \cdot k_2$:

Հետևաբար. $a + b = m \cdot k_1 + m \cdot k_2 = m(k_1 + k_2) = m \cdot k_3$, իսկ $a - b = m \cdot k_1 - m \cdot k_2 = m(k_1 - k_2) = m \cdot k_4$:

Ստացված հավասարություններն էլ ապացուցում են նշված հատկությունը:

Ճիշտ նույն ձևով կապացուցվի, որ եթե երեք կամ ավելի թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է m -ի, ապա դրանց գումարը նույնպես բաժանվում է m -ի:

Հատկություն 2: Եթե a -ն բաժանվում է m -ի, իսկ b -ն ցանկացած թիվ է, ապա ab -ն բաժանվում է m -ի:

Ապացուցում: Իրո՛ք, եթե a -ն բաժանվում է m -ի, ապա $a = m \cdot k$: Հետևաբար $ab = mkb = m \cdot (kb) = m \cdot k_1$, հետևաբար՝ ab -ն բաժանվում է m -ի:

Ընդհանրապես՝ եթե մի քանի թվից մեկը բաժանվում է m -ի, ապա այդ թվերի արտադրյալը բաժանվում է m -ի:

Հատկություն 3: Եթե a -ն բաժանվում է m -ի, իսկ m -ը՝ n -ի, ապա a -ն բաժանվում է n -ի:

Ապացուցում: Իրո՛ք՝ $a = m \cdot k_1$ և $m = n \cdot k_2$ հավասարություններից հետևում է, որ՝

$$a = m \cdot k_1 = (n \cdot k_2)k_1 = n \cdot (k_1k_2) = n \cdot k_3:$$

Հետևաբար՝ a -ն բաժանվում է n -ի:

Հատկություն 4: Եթե a -ն բաժանվում է m -ի, և b -ն բաժանվում է n -ի, ապա ab -ն կբաժանվի mn -ի:

Ապացուցում: Եթե $a = m \cdot k_1$, և $b = n \cdot k_2$, ապա $a \cdot b = m \cdot k_1 \cdot n \cdot k_2 = m \cdot n(k_1k_2) = m \cdot n \cdot k_3$, ինչն էլ ապացուցում է նշված հատկությունը:

Այս հատկությունից հետևում է, որ եթե a -ն բաժանվում է m -ի, ապա ցանկացած n բնական թվի դեպքում a^n -ը բաժանվում է m^n -ի:

Հատկություն 5: Եթե a և b թվերը բաժանվում են m -ի, ապա a և b թվերի կցագրումից ստացված թիվը $(\overline{ab})$ նույնպես բաժանվում է m -ի:

Ապացուցում: Իրո՞ք՝ եթե a և b թվերը բաժանվում են m -ի, ապա՝ $a = m \cdot k_1$, և $b = m \cdot k_2$: Այդ դեպքում, եթե b թիվն ունի n թվանշան, ապա կունենանք.

$\overline{ab} = 10^n \cdot a + b = 10^n \cdot m \cdot k_1 + m \cdot k_2 = m \cdot (10^n \cdot k_1 + k_2) = m \cdot k_3$ հավասարությունից. հետևում է, որ $\overline{ab}$ -ն բաժանվում է m -ի:

Վերջում ներկայացնենք բաժանելիության ևս մի հատկություն, որի ապացուցումը կկատարենք հետագայում:

Հատկություն 6: Եթե a և b թվերի արտադրյալը բաժանվում է p պարզ թվի, ապա a և b թվերից գոնե մեկը բաժանվում է p -ի:

Նշենք, որ այս հատկության ճշմարիտ լինելուց հետևում է, որ, դա ճիշտ կլինի նաև երեք և ավելի թվերի արտադրյալի դեպքում:

Իրո՞ք, եթե abc արտադրյալը բաժանվում է p պարզ թվի, ապա կստացվի, որ a և bc թվերի արտադրյալը բաժանվում է p պարզ թվի: Հետևաբար, ըստ այդ հատկության՝ a և bc թվերից գոնե մեկը կբաժանվի p -ի: Եթե a -ն է բաժանվում p -ի, ապա հատկությունը երեք թվի դեպքում կլինի ճշմարիտ: Եթե a -ն չի բաժանվում p -ի, ապա bc արտադրյալը կբաժանվի p -ի, հետևաբար՝ b և c թվերից գոնե մեկը կբաժանվի p -ի, հետևաբար՝ հատկությունը երեք թվի դեպքում կլինի ճշմարիտ:

Ներկայացնենք բաժանելիության հատկությունների կիռարման օրինակ:

Օրինակ. Ապացուցել, որ եթե $4a$ -ն բաժանվում է 11-ի, ապա a -ն բաժանվում է 11-ի:

Ապացուցում: Դիցուք՝ $4a$ -ն բաժանվում է 11-ի: Այդ դեպքում $4a \cdot 3 = 12a$ թիվը նույնպես կբաժանվի 11-ի (հատկություն 2): Հետևաբար՝ $a = 12a - 11a$ թիվը կբաժանվի 11-ի՝ որպես 11-ի բաժանվող երկու թվերի տարբերություն (հատկություն 1):

Խնդիրներ

1. Դիցուք՝ a -ն բաժանվում է m -ի, իսկ b -ն չի բաժանվում m -ի: $a + b, a - b$ և ab թվերից որո՞նք են բաժանվում m -ի:
2. Ապացուցե՛ք, որ եթե a, b և c թվերը բաժանվում են m -ի, ապա $a - b + c$ թիվը նույնպես բաժանվում է m -ի:
3. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն և b -ն բաժանվում են m -ի, ապա ab արտադրյալը բաժանվում է m^2 -ուն:
4. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն բաժանվում է 7-ի, ապա $3a$ -ն բաժանվում է 21-ի:
5. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն բաժանվում է 4-ի, իսկ b -ն բաժանվում է 9-ի, ապա ab -ն բաժանվում է 36-ի:
6. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն բաժանվում է 5-ի, իսկ b -ն բաժանվում է 6-ի, ապա $3a + 5b$ -ն բաժանվում է 15-ի:
7. Ապացուցե՛ք, որ երեք հաջորդական թվերի գումարը բաժանվում է 3-ի:
8. Ապացուցե՛ք, որ.
ա) չորս հաջորդական թվերի գումարը չի բաժանվում 4-ի:
բ) հինգ հաջորդական թվերի գումարը բաժանվում է 5-ի:
9. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն բաժանվում է 2-ի, ապա.
ա) a^2 -ին բաժանվում է 4-ի, բ) a^3 -ն բաժանվում է 8-ի:
10. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն բաժանվում է 3-ի, ապա $(a^2 + 15a)$ -ն բաժանվում է 9-ի:
11. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն բաժանվում է 7-ի, և b -ն բաժանվում է 14-ի, ապա $\overline{ab}$ -ն բաժանվում է 14-ի:
12. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն բաժանվում է 3-ի, և b -ն բաժանվում է 15-ի, ապա $\overline{ab}$ -ն բաժանվում է 15-ի:
13. Ապացուցե՛ք, որ եթե a, b, c թվերը բաժանվում են m -ի, ապա $\overline{abc}$ թիվը նույնպես բաժանվում է m -ի:

14. Ապացուցե՛ք, որ եթե $5a$ -ն բաժանվում է 4 -ի, ապա a -ն բաժանվում է 4 -ի:

15. Ապացուցե՛ք, որ եթե $3a$ -ն բաժանվում է 7 -ի, ապա a -ն բաժանվում է 7 -ի:

16. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն բաժանվում է 2 -ի և 3 -ի, ապա a -ն բաժանվում է 6 -ի:

17. Ապացուցե՛ք, որ եթե a -ն բաժանվում է 4 -ի և 6 -ի, ապա a -ն բաժանվում է 12 -ի:

18. Ճի՞շտ է արդյոք հետևյալ պնդումը: Եթե a -ն բաժանվում է m -ի և n -ի, ապա a -ն բաժանվում է mn -ի:

19. Ապացուցե՛ք, որ եթե $(5a - 2b)$ -ն բաժանվում է 9 -ի, ապա $(2a + b)$ -ն նույնպես բաժանվում է 9 -ի:

20. Ապացուցե՛ք, որ եթե $(4a + 3b)$ -ն բաժանվում է 13 -ի, ապա $(11a + 5b)$ -ն նույնպես բաժանվում է 13 -ի:

21. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած քառանիշ թվի և նույն թվանշաններով հակառակ կարգով գրված քառանիշ թվի գումարը բաժանվում է 11 -ի:

22. Ապացուցե՛ք, որ եթե $\overline{abc}$ եռանիշ թիվը բաժանվում է 7 -ի, ապա $(a - 2b + 4c)$ -ն նույնպես բաժանվում է 7 -ի:

23. Ապացուցե՛ք, որ եթե $\overline{abcd}$ քառանիշ թիվը բաժանվում է 31 -ի, ապա $(27d - 9c + 3b - a)$ նույնպես բաժանվում է 31 -ի:

24. Ապացուցե՛ք, որ եթե a^2 -ին բաժանվում է $(a - b)$ -ի, ապա ab -ն նույնպես բաժանվում է $(a - b)$ -ի:

25. Ապացուցե՛ք, որ եթե $(ab - cd)$ -ն բաժանվում է $(a + c)$ -ի, ապա $(bc - ad)$ -ն նույնպես բաժանվում է $(a + c)$ -ի:

Թեմա 7. Թվերի բաժանելիության հայտանիշները

Թվերի բաժանելիության հայտանիշները հնարավորություն են տալիս, առանց անկյունային բաժանում կատարելու, պարզելու որևէ բնական թիվ որոշ թվերի (2-ի, 3-ի և այլն) առանց մնացորդի բաժանվելու հարցը: Ներկայացնենք և հիմնավորենք բնական թիվը 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11 և 25 թվերին բաժանելիության հայտանիշները:

2-ի բաժանելիության հայտանիշ:

Հայտանիշ 1. 2-ի բաժանվում են այն և միայն այն թվերը, որոնք վերջանում են 0, 2, 4, 6, 8 թվանշաններով:

Ապացուցում: Եթե թիվը վերջանում է b նիշով, ապա ունի $10a + b$ տեսքը, որտեղ a -ն ցանկացած բնական թիվ է: Այժմ, եթե b -ն լինի նշված նիշերից մեկը, ապա b -ն առանց մնացորդի կբաժանվի 2-ի: $10a$ թիվը նույնպես բաժանվում է 2-ի: Հետևաբար՝ այդ թվերի գումարը, այսինքն՝ տրված թիվը, նույնպես կբաժանվի 2-ի (տե՛ս թվերի բաժանման հատկությունները):

Դիցուք՝ $10a + b$ բաժանվում է 2-ի: Այդ դեպքում $b = (10a + b) - 10a$ միանիշ թիվը նույնպես կբաժանվի 2-ի՝ որպես 2-ի բաժանվող երկու թվերի տարբերություն: Իսկ միանիշ թվերից 2-ի բաժանվում են 0, 2, 4, 6, 8 թվերը: Նշենք, որ 2-ի բաժանվող թվերն անվանում են զույգ թվեր, իսկ չբաժանվողները՝ կենտ թվեր: Զույգ թվի բանաձևն է՝ $2n$, կենտ թվինը՝ $2n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$): Նույն ձևով ապացուցվում են նաև 5-ի և 10-ի բաժանելիության հայտանիշները:

Հայտանիշ 2. 5-ի (10-ի) բաժանվում են այն և միայն այն թվերը, որոնք վերջանում են 0 կամ 5 թվանշաններով (0 թվանշանով):

Համանման ձևով են ապացուցվում նաև 4-ի, 8-ի և 25-ի բաժանելիության հայտանիշները:

Հայտանիշ 3. 4-ի (25-ի) բաժանվում են այն և միայն այն թվերը, որոնց վերջին երկու թվանշանով նույն հաջորդականությամբ կազմված թիվը (այդ թիվը կարող է լինել 00 կամ 0-ով սկսվող այլ թիվ) բաժանվում է 4-ի (25-ի):

(Ապացուցե՛ք ինքնուրույն՝ թիվը ներկայացնելով $100a + b$ տեսքով, որտեղ b -ն թվի վերջին երկու թվանշանով կազմված թիվն է):

Հայտանիշ 4. 8-ի բաժանվում են այն և միայն այն թվերը, որոնց վերջին երեք թվանշանով նույն հաջորդականությամբ կազմված թիվը (որը կարող է նաև լինել 000, 024, 310 և այլն տեսքի թիվ) բաժանվում է 8-ի:

Ապացույց: Թիվը գրենք $1000a + b$ տեսքով, որտեղ b -ն վերջին երեք նիշով կազմված թիվն է: Այժմ, քանի որ $1000a$ թիվը բաժանվում է 8-ի ($1000a = 8 * 125a$), ապա b -ն 8-ի բաժանվելու դեպքում $1000a + b$ նույնպես կբաժանվի 8-ի: Մյուս կողմից՝ $1000a + b$ թիվը 8-ի բաժանվելու դեպքում 8-ի կբաժանվի նաև $b = (1000a + b) - 1000a$ տարբերությունը:

Հայտանիշն ապացուցված է:

Ձևակերպենք թիվը 3-ի և 9-ի բաժանելիության հայտանիշները:

Հայտանիշ 5. 3-ի (9-ի) բաժանվում են այն և միայն այն թվերը, որոնց թվանշանների գումարը բաժանվում է 3-ի (9-ի):

Ապացուցում: Դիցուք՝ b -ն $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ թվի թվանշանների գումարն է (բազմակետը դրվում է, քանի որ թվի թվանշանների քանակը որոշակի չէ: Դա նշանակում է, որ ապացուցումը կատարում ենք ընդհանուր դեպքում): Ունենք

$b = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ (a թվի թվանշանների գումարն է):
Նախ՝ նկատենք, որ ցանկացած k -ի դեպքում $10^k - 1$ բաժանվում է 3-ի և 9-ի:

$$\text{Իրոք } 10^k - 1 = \underbrace{1 \underbrace{00 \dots 0}_{k \text{ հաստ}}} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ հաստ}} = 9 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{k \text{ հաստ}} = 3 \cdot \underbrace{33 \dots 3}_{k \text{ հաստ}}:$$

Դիտարկենք $a - b$ տարբերությունը.

$$\begin{aligned} a - b &= 10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0 - \\ &\quad -(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) = \\ &= (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1) \cdot a_{n-1} + \dots + (10 - 1) \cdot a_1 \end{aligned}$$

Քանի որ գումարելիներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 3-ի (9-ի), հետևաբար՝ $a - b$ միշտ բաժանվում է 3-ի (9-ի): Այժմ, եթե b -ն բաժանվի 3-ի (9-ի), ապա $a = (a - b) + b$ նույնպես կբաժանվի 3-ի (9-ի): Ճիշտ է նաև հակադարձը՝ եթե a -ն բաժանվի 3-ի (9-ի), ապա $b = a - (a - b)$ նույնպես կբաժանվի 3-ի (9-ի): Հայտանիշն ապացուցված է:

Ձևակերպենք թիվը 11-ի բաժանելիության հայտանիշը:

Հայտանիշ 6. 11-ի բաժանվում են այն և միայն այն թվերը, որոնց զույգ համարի տարակարգերում գրված թվանշանների գումարի և կենտ համարի տարակարգերում գրված թվանշանների գումարի տարբերությունը բաժանվում է 11-ի:

Ապացուցում: Թիվը բաժանենք 2 թվանշանից բաղկացած խմբերի՝ սկսելով թվի վերջից և շարժվելով դեպի ձախ: Հարմար է այդ թիվը գրառել հետևյալ տեսքով.

$a = \overline{a_n b_n a_{n-1} b_{n-1} \dots a_1 b_1 a_0 b_0}$ (նշենք, որ եթե թվի թվանշանների քանակը կենտ է, ապա կարող ենք համարել, որ $a_n = 0$, և որը չի խախտում ապացուցման ընդհանրությունը):

Դիցուք՝ b -ն այդ թվի զույգ համարի տարակարգերում գրված թվանշանների գումարի և կենտ համարի տարակարգերում գրված թվանշանների գումարի տարբերությունն է՝

$$b = (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0) - (b_n + b_{n-1} + \dots + b_0) = \\ = (a_n - b_n) + (a_{n-1} - b_{n-1}) + \dots + (a_0 - b_0):$$

Նկատենք, որ ցանկացած k -ի դեպքում $10^{2k} - 1$ և $10^{2k} + 1$ թվերը բաժանվում են 11-ի:

Իրոք՝ $10^{2k} - 1 = \underbrace{1\ 00 \dots 0}_{2k} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{2k}$: Վերջինս բաժանվում է 11-ի, քանի որ k հատ 99-եր կցագրված են իրար (բաժանման հասկոություն):

Նկատենք, որ $10^{2k+1} + 1 = 11 \cdot 10^{2k} - (10^{2k} - 1)$, հետևաբար՝ դա նույնպես բաժանվում է 11-ի:

Այժմ դիտարկենք $a + b$ գումարը.

$$a + b = 10^{2n+1} \cdot a_n + 10^{2n} \cdot b_n + 10^{2n-1} \cdot a_{n-1} + 10^{2n-2} \cdot \\ b_{n-1} + \dots + 10^3 \cdot a_1 + 10^2 \cdot b_1 + 10 \cdot a_0 + b_0 + (a_n - b_n) + \\ (a_{n-1} - b_{n-1}) + \dots + (a_1 - b_1) + (a_0 - b_0) = (10^{2n+1} + 1) \cdot a_n + \\ (10^{2n} - 1) \cdot b_n + (10^{2n-1} + 1) \cdot a_{n-1} + (10^{2n-2} - 1) \cdot b_{n-1} + \\ (10^3 + 1) \cdot a_1 + (10^2 - 1) \cdot b_1 + (10 + 1) \cdot a_0:$$

Քանի որ փակագծերում գրված արտահայտությունների արժեքները բաժանվում են 11-ի, հետևաբար՝ $a + b$ միշտ բաժանվում է 11-ի: Այժմ, եթե b -ն բաժանվի 11-ի, ապա $a = (a + b) - b$ թիվը նույնպես կբաժանվի 11-ի, և հակադարձը. եթե a -ն բաժանվի 11-ի, ապա $b = (a + b) - a$ թիվը նույնպես կբաժանվի 11-ի:

Ներկայացնենք բաժանելիության հայտանիշները լուսաբանող օրինակ:

Օրինակ. 15906 թիվը բաժանվում է 2-ի, չի բաժանվում 4-ի (06-ը չի բաժանվում 4-ի), թվանշանների գումարը՝

$1+5+9+0+6=21$, հետևաբար՝ բաժանվում է 3-ի և չի բաժանվում 9-ի, $(1+9+6)-(0+5)=11$, հետևաբար՝ բաժանվում է 11-ի:

Երբեմն անհրաժեշտ է լինում գտնել բնական թվի որևէ բնական ցուցիչով աստիճանի տասական գրության վերջին թվանշանը:

Օրինակ. 16^3 արտահայտության արժեքը հավասար է 4096, որի վերջին թվանշանը 6 է, իսկ $19^4 = 130321$ թվի վերջին թվանշանը՝ 1:

Հաշվի առնելով, որ մի քանի թվի արտադրյալի վերջին թվանշանը հավասար է արտադրիչների վերջին թվանշանների արտադրյալին, կղիտարկենք միայն միանիշ թվերի բնական ցուցիչով աստիճանները:

Դիցուք՝ a բնական թվի տասական գրությունը վերջանում է 0, 1, 5 կամ 6 թվանշաններից որևէ մեկով: Հեշտ է նկատել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում a^n արտահայտության արժեքի վերջին թվանշանը կհամընկնի a թվի վերջին թվանշանի հետ:

Օրինակ. 30^5 թիվը կվերջանա 0-ով, 21^7 -ը՝ 1-ով, 35^6 -ը՝ 5-ով, 26^3 -ը՝ 6-ով:

$9^{2n} = 81^n = \dots 1$ և $9^{2n+1} = 81^n * 9 = \dots 1 * 9 = \dots 9$ հավասարություններից հետևում է, որ 9^{2n} թվի վերջին թվանշանը ցանկացած n -ի դեպքում կլինի 1, իսկ 9^{2n+1} թվինը՝ 9-ը:

$4^{2n} = 16^n = \dots 6$ և $4^{2n+1} = 16^n \cdot 4 = \dots 6 \cdot 4 = \dots 4$ հավասարություններից հետևում է, որ վերջում 4 թվանշան ունեցող բնական թվի զույգ ցուցիչով աստիճաններն ավարտվում են 6-ով, իսկ կենտ ցուցիչով աստիճանները՝ 4-ով:

Հաշվի առնելով $3^{4n} = 81^n = \dots 1$ և $7^{4n} = 2401^n = \dots 1$ հավասարությունները և այն, որ թիվը 1-ով վերջացող թվով բազմապատկելիս իր վերջին թվանշանը չի փոխվում, հեշտ է պարզել,

թե ի՛նչ թվանշանով են ավարտվում 3-ի կամ 7-ի բնական ցուցիչով աստիճանները:

Համանման ձևով օգտվելով $2^{4n} = 16^n = \dots 6$ և $8^{4n} = 256^n = \dots 6$ հավասարություններից և այն իրողությունից, որ զույգ թիվը 6-ով ավարտվող թվով բազմապատկելիս իր վերջին թվանշանը չի փոխվում՝ կգտնենք 2-ի, 8-ի բնական ցուցիչով աստիճանի վերջին թվանշանը:

Վերը նշվածները ներկայացնենք աղյուսակով.

Թիվը\ցուցիչը	$4n$	$4n + 1$	$4n + 2$	$4n + 3$
...2	6	2	4	8
...3	1	3	9	7
...7	1	7	9	3
...8	6	8	4	2

Օրինակ. Գտնել $37^{15} \cdot 2^{14} - 23^{10} \cdot 18^{11}$ թվի վերջին թվանշանը:

Լուծում: $37^{15} \cdot 2^{14} - 23^{10} \cdot 18^{11} = \dots 3 \cdot \dots 4 - \dots 9 \cdot \dots 8 = \dots 2 - \dots 2 = \dots 0$: Պատ.՝ 0:

Վարժություններ և խնդիրներ

1. 2, 4, 5 և 7 թվանշաններից յուրաքանչյուրը մեկ անգամ օգտագործելով՝ կազմե՛ք ամենափոքր քառանիշ թիվը, որը բաժանվի.

ա) 3-ի,

բ) 4-ի,

գ) 5-ի,

դ) 8-ի:

2. 1, 3, 5 և 6 թվանշաններից յուրաքանչյուրը մեկ անգամ օգտագործելով՝ կազմե՛ք ամենամեծ քառանիշ թիվը, որը բաժանվի.

ա) 3-ի, բ) 4-ի, գ) 5-ի, դ) 8-ի:

3. 3^*6^*7 արտահայտության մեջ $*$ -ները փոխարինե՛ք միևնույն թվանշանով այնպես, որ ստացված թիվը բաժանվի.

ա) 9-ի, բ) 11-ի:

4. Ապացուցե՛ք, որ.

ա) $\underbrace{33 \dots 3}_{100} - \underbrace{88 \dots 8}_{99}$ թիվը բաժանվում է 5-ի,

բ) $\underbrace{11 \dots 1}_{50} - \underbrace{99 \dots 9}_{40}$ թիվը բաժանվում է 8-ի,

գ) $\underbrace{155 \dots 5}_{2014}$ թիվը բաժանվում է 9-ի,

դ) $\underbrace{381381 \dots 381}_{2016} + 54$ թիվը բաժանվում է 45-ի,

ե) $\underbrace{184184 \dots 184}_{2016}$ թիվը բաժանվում է 11-ի:

5. Գտնե՛ք արտահայտության արժեքի վերջին թվանշանը.

ա) 21^7 բ) 25^8 գ) 36^9 դ) 20^{11} ե) $11^{19} + 35^{18} - 16^{17}$

զ) $31^{13} \cdot 35^{23} + 10^8$ է) 29^4 ը) 19^7 թ) 14^8 ժ) 54^5

ժա) $39^9 - 21^7 + 34^8$ ժբ) $26^{27} \cdot 9^{10} - 24^{12}$ ժգ) 2^{15} ժդ) 13^{13}

ժե) 17^{19} ժզ) 38^{14} ժէ) $23^{23} - 7^{14} + 18^{28}$ ժը) $32^{14} \cdot 27^{13} + 8^{17}$:

6. Ապացուցե՛ք, որ. ա) $71^{17} - 701$ թիվը բաժանվում է 10-ի,

բ) $56^{65} - 561$ թիվը բաժանվում է 5-ի,

գ) $10^{20} + 44$ թիվը բաժանվում է 9-ի,

դ) $10^{31} + 1$ թիվը բաժանվում է 11-ի:

7. Ապացուցե՛ք, որ թիվը բաղադրյալ է.

ա) 123456789

բ) $10^{25} + 11$

գ) $16^{16} + 9$

դ) $7^{16} + 5^{11}$

ե) $10^{22} + 43$,

զ) $14^{21} + 21$

8. Ապացուցե՛ք, որ.

ա) $6^{111} - 111$ թիվը բաժանվում է 5-ի,

բ) $4^{17} + 1$ թիվը բաժանվում է 5-ի,

գ) $7 \cdot 10^{53} + 11$ թիվը բաժանվում է 9-ի,

դ) $100 \cdot 5^{57} + 4$ թիվը բաժանվում է 8-ի:

9. Ապացուցե՛ք, որ.

ա) $2^{17} + 152$ թիվը բաժանվում է 8-ի,

բ) $5 \cdot 6^{38} + 4 \cdot 12^{97}$ թիվը բաժանվում է 9-ի:

10. Ապացուցե՛ք, որ.

ա) $125^8 - 25^{10}$ թիվը բաժանվում է 12-ի,

բ) $32^8 - 16^9$ թիվը բաժանվում է 15-ի:

11. Ապացուցե՛ք, որ հետևյալ թվերը բաղադրյալ են.

ա) $17^{17} - 13^{13}$

բ) $4^{17} + 1$

գ) $3^{300} + 4^{300} + 5^{300}$

դ) $10^{19} - 1$

ե) $10^{23} - 7$

զ) $22^{33} + 33^{22}$

է) $17^{17} + 13^{13}$

ը) $4^{91} - 9^{19}$:

12. Ապացուցե՛ք, որ հետևյալ թվերը բաղադրյալ են.

ա) $\underbrace{11 \dots 1}_{2015} 7$

բ) $\underbrace{77 \dots 7}_{2015} 1$

13. Ապացուցե՛ք, որ.

ա) $\underbrace{66 \dots 6}_{66}$ թիվը բաժանվում է 18-ի,

բ) $\underbrace{55 \dots 5}_{15}$ թիվը բաժանվում է 15-ի:

14. Գտե՛ք 0 և 1 թվանշաններով կազմված ամենափոքր թիվը, որը բաժանվում է.

ա) 12-ի,

բ) 15-ի,

գ) 225-ի:

15. 4863 թվի աջից և ձախից կցագրե՛ք մեկական թվանշան այնպես, որ ստացված թիվը բաժանվի.

ա) 45-ի,

բ) 72-ի :

16. *-երը փոխարինե՛ք թվանշաններով այնպես, որ.

ա) $42*3*$ թիվը բաժանվի 72-ի,

բ) $6*2*$ թիվը բաժանվի 45-ի:

17. Գտե՛ք $*97*$ տեսքի բոլոր քառանիշ թվերի քանակը, որոնք բաժանվում են 45-ի:

18. 523 թվի աջից և ձախից կցագրե՛ք մեկական թվանշան այնպես, որ ստացված թիվը բաժանվի 99-ի:

19. 6781253 թվից ջնջե՛ք հնարավորինս քիչ թվանշաններ այնպես, որ ստացված թիվը բաժանվի. ա) 36-ի, բ) 45-ի:

20. 123456789 թվից ջնջե՛ք 3 թվանշան այնպես, որ ստացված թիվը բաժանվի 72-ի:

21. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 50$ արտադրյալի արժեքի բոլոր թվանշանները գումարել են: Այնուհետև գումարել են ստացված թվի բոլոր թվա-

նշանները, և այդպես շարունակ՝ մինչև ստացվի միանիշ թիվ:
Ո՞ր թիվը կստացվի:

22. Թվի թվանշանները տեղափոխել են և ստացել են սկզբնականից 3 անգամ փոքր թիվ: Ապացուցե՛ք, որ սկզբնական թիվը բաժանվում է 27-ի:

23. Գտե՛ք բոլոր այն եռանիշ թվերի քանակը, որոնց թվանշանների գումարն 9 է կամ 18:

24. Գտե՛ք այն եռանիշ թիվը, որը 21 անգամ մեծ է իր թվանշանների գումարից:

25. Ապացուցե՛ք, որ.

- ա) $28^{25} - 7^{23}$ թիվը բաժանվում է 35-ի,
- բ) $33^{32} - 12^{12}$ թիվը բաժանվում է 135-ի:

26. Ապացուցե՛ք, որ $\frac{11 \dots 1}{18}$ թիվը բաժանվում է 99-ի:

27. 8153 թվի աջից և ձախից կցագրե՛ք մեկական թվանշան այնպես, որ ստացված թիվը բաժանվի 88-ի:

28*. $8^*8^*8^*8$ արտահայտության մեջ $*$ -ները փոխարինե՛ք միևնույն թվանշանով այնպես, որ ստացված թիվը բաժանվի 11-ի:

29*. 0, 1, 2, 3, 4, 5 և 6 թվանշաններից յուրաքանչյուրը մեկ անգամ օգտագործելով՝ կազմե՛ք 11-ի բազմապատիկ ամենափոքր և ամենամեծ յոթանիշ թվերը:

30*. Դիցուք A -ն 3^{20} թվի թվանշանների գումարն է: Գտե՛ք A -ի թվանշանների գումարը:

Թեմա 8. Մնացորդով բաժանում

Դիտարկենք ինդիքը. Ամենաշատը քանի՞ տետր կարող է գնել աշակերտը, եթե նա ունի 500 դրամ, իսկ տետրն արժե 40 դրամ:

Պարզ է, որ տետրերի առավելագույն քանակը գտնելու համար 500-ը պետք է անկյունով բաժանենք 40-ի.

$$\begin{array}{r|l} 500 & 40 \\ \hline 40 & 12\text{-քանորդ} \\ \hline 100 & \\ 80 & \\ \hline 20 & \text{մնացորդ} \end{array}$$

Հետևաբար՝ աշակերտը կգնի 12 տետր, և իրեն կմնա 20 դրամ, որը չի բավարարում ևս մեկ տետր գնելու համար:

Այսպիսի բաժանումն անվանում են մնացորդով բաժանում: 500-ն անվանում են բաժանելի, 40-ը՝ բաժանարար, 12-ը՝ քանորդ, 20-ը՝ մնացորդ:

Պարզ է, որ մնացորդը միշտ փոքր կլինի բաժանարարից:

Նկատենք, որ եթե քանորդը բազմապատկենք բաժանարարով և գումարենք մնացորդը, ապա կստանանք բաժանելին, կամ, եթե բաժանելիից հանենք մնացորդը և արդյունքը բաժանենք բաժանարարին, ապա կստանանք քանորդը.

$$500 = 40 \cdot 12 + 20 \text{ կամ } (500 - 20): 40 = 12:$$

Ընդհանրապես՝ եթե a -ն b -ի բաժանելիս քանորդում ստացվում է q , իսկ մնացորդը՝ r , ապա կարելի է գրել՝ $a = b \cdot q + r$, որտեղ $0 \leq r < b$:

Ընդ որում, եթե $r = 0$, ապա ստում ենք, որ a -ն առանց մնացորդի բաժանվում է (կամ՝ պարզապես բաժանվում է) b -ի: Իսկ եթե a -ն փոքր է b -ից, ապա $q = 0$ և $r = a$:

Նշված հավասարությունը հնարավորություն է տալիս բանաձևով արտահայտելու բոլոր այն բնական թվերի բազմությունը, որոնք նույն թվի բաժանելիս ստացվում են միևնույն մնացորդները:

Օրինակ. Բոլոր այն բնական թվերը, որոնք 7-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 3, ունեն $7k + 3$ տեսքը:

Խնդիր 1. Ապացուցել, որ եթե a թիվը 5-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 2, ապա $3a + 4$ արտահայտության արժեքը բաժանվում է 5-ի:

Լուծում: Ըստ խնդրի պայմանի՝ a -ն ունի $5k + 2$ տեսքը:

Հետևաբար՝ $3a + 4 = 3(5k + 2) + 4 = 15k + 10 = 5(2k + 1)$, որը բաժանվում է 5-ի:

Նկատենք, որ a -ն b -ի բաժանելիս r մնացորդը կարող է ընդունել $0, 1, 2 \dots (b - 1)$ արժեքները:

Օրինակ. $b = 2$ դեպքում մենք ստանում ենք, որ յուրաքանչյուր a ամբողջ թիվ կարող է ներկայացվել կա՛մ $a = 2q$ (այդ դեպքում բաժանվում է 2-ի, այսինքն՝ զույգ թիվ է), կա՛մ $a = 2q + 1$ տեսքով (այդ դեպքում չի բաժանվում 2-ի, այսինքն՝ կենսո թիվ է):

$b = 3$ դեպքում ստանում ենք, որ յուրաքանչյուր a ամբողջ թիվ կարող է ներկայացվել հետևյալ տեսքից մեկով՝ $3q$, $3q + 1$ և $3q + 2$: (Երբեմն հարմար է լինում $3q + 2$ տեսքի թիվը գրել նաև $3q_1 - 1$ տեսքով: Իրո՛ք՝ $3q + 2 = 3(q + 1) - 1 = 3q_1 - 1$: Այդ դեպքում 3-ի չբաժանվող թվերը կարելի է ներկայացնել $3q \pm 1$ տեսքով):

Թվերի նշված ներկայացումները հաճախ են կիրառվում խնդիրներ լուծելիս:

Խնդիր 2. Ապացուցել, որ երեք հաջորդական թվերի արտադրյալը բաժանվում է 6-ի:

Լուծում: Երեք հաջորդական թվերի համար կատարենք $n, n+1, n+2$ (երբեմն հարմար է լինում $n-1, n, n+1$) նշանակումը:

Պետք է ապացուցել, որ ցանկացած n -ի դեպքում $a = n(n+1)(n+2)$ բաժանվում է 6-ի:

Դիտարկենք n -ի բոլոր հնարավոր տարբերակները՝ $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$:

Նկատենք, որ $n = 6k, 6k+4, 6k+5$ դեպքում համապատասխանաբար $n = 6k, n+2 = 6k+4+2 = 6(k+1), n+1 = 6k+5+1 = 6(k+1)$ արտադրիչները բաժանվում են 6-ի, հետևաբար՝ a -ն կբաժանվի 6-ի:

Եթե $n = 6k+1$, ապա $a = n(n+1)(n+2) = (6k+1)(6k+2)(6k+3) =$

$= 6(6k+1)(3k+1)(2k+1)$ կբաժանվի 6-ի:

Համանման ձևով ապացուցվում են $n = 6k+2$ և $n = 6k+3$ դեպքերը:

Կարելի է խնդիրը լուծել նաև այլ եղանակով: Ապացուցենք, որ a -ն բաժանվում է նաև 2-ի, և 3-ի, հետևաբար՝ կբաժանվի նաև 6-ի:

Իրոք՝ $n = 2k$ դեպքում $n = 2k$, իսկ $n = 2k+1$ դեպքում $n+1 = 2k+1+1 = 2(k+1)$ բաժանվում են 2-ի: Հետևաբար՝ a -ն բաժանվում է 2-ի:

Նկատենք, որ $n = 3k, n = 3k+1, n = 3k+2$ դեպքերում համապատասխանաբար

$n = 3k, n + 2 = 3k + 1 + 2 = 3(k + 1), n + 1 = 3k + 2 + 1 = 3(k + 1)$ արտադրյալները բաժանվում են 3-ի: Հետևաբար՝ a -ն կբաժանվի 6-ի:

Վարժությաններ և խնդիրներ

1. Գտե՛ք. ա) այն թիվը, որը 13-ի բաժանելիս քանորդում ստացվում է 8, մնացորդում՝ 5,

բ) բաժանելին, եթե բաժանարարը b է, քանորդը՝ p , մնացորդը՝ r -ը:

2. Գրե՛ք այն թվերի բանաձևը, որոնք.

ա) 4-ի բաժանելիս ստացվում է 3 մնացորդ,

բ) 9-ի բաժանելիս ստացվում է 5 մնացորդ:

3. Քանի՞ բնական թիվ կա 300-ից փոքր, որոնք.

ա) 7-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ:

բ) 7-ի բաժանելիս ստացվում է 6 մնացորդ,

գ) չեն բաժանվում 7-ի:

4. Երկու բնական թվեր 5-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում են 2 և 3: Ի՞նչ մնացորդ կստացվի այդ թվերի՝

ա) գումարը 5-ի բաժանելիս,

բ) տարբերությունը 5-ի բաժանելիս,

գ) արտադրյալը 5-ի բաժանելիս:

5. Թիվը 11-ի բաժանելիս ստացվում է 5 մնացորդ: Ի՞նչ մնացորդ կստացվի այդ թվի եռապատիկը 11-ի բաժանելիս:

6. Ինչպե՞ս կփոխվեն քանորդը և մնացորդը, եթե բաժանելին և բաժանարարը մեծացնենք 3 անգամ:

7. Ի՞նչ մնացորդներ կարող են ստացվել 3-ի բազմապատիկ թիվը 12-ի բաժանելիս:

8. Դիցուք՝ a թիվը 9-ի բաժանելիս ստացվում է 7 մնացորդ: Ի՞նչ մնացորդներ կարող են ստացվել այդ թիվը 27-ի բաժանելիս:

9. Դիցուք՝ a և b թվերը չեն բաժանվում m -ի: Կարո՞ղ է արդյոք հետևյալ թիվը բաժանվել m -ի.

ա) $a - b$ բ) $a + b$ գ) ab :

10. Դիցուք՝ a -ն բաժանվում է m -ի, իսկ b -ն m -ի բաժանելիս ստացվում է $r > 0$ մնացորդ: Ի՞նչ մնացորդ է ստացվում հետևյալ թիվը m -ի բաժանելիս.

ա) $a - b$ բ) $a + b$ գ) ab :

11. Դիցուք՝ a թիվը 12-ի բաժանելիս ստացվում է 6 մնացորդ: Կարո՞ղ է արդյոք այդ թիվը 21-ի բաժանելիս ստացվել 16 մնացորդ:

12. Գտե՛ք $20! + 200$ թիվը 133-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

13. Գտե՛ք $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 + 2017 \cdot 2018^2$ արտահայտության արժեքը 3-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

14. Ի՞նչ մնացորդ կստացվի թիվը 15-ի բաժանելիս, եթե այդ թիվը՝

ա) 3-ի և 5-ի բաժանելիս ստացվում է միևնույն 2 մնացորդը:

բ) 3-ի բաժանելիս ստացվում է 2, իսկ 5-ի՝ 3 մնացորդ:

15. Քանի՞ բնական թիվ կա 500-ից փոքր, որոնք՝

ա) 3-ի և 5-ի բաժանելիս ստացվում է միևնույն 2 մնացորդ:

բ) 3-ի բաժանելիս ստացվում է 2, իսկ 5-ի՝ 3 մնացորդ:

16. Գտե՛ք ամենափոքր թիվը, որը 2-ի, 3-ի, 5-ի, 7-ի բաժանելիս ստացվում է միևնույն 1 մնացորդը:

17. Գտե՛ք ամենափոքր թիվը, որը 2-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ, 3-ի՝ 2, 4-ի՝ 3, 5-ի՝ 4, իսկ 6-ի՝ 5:

18. 92 և 110 թվերն ինչ-որ թվի բաժանելիս ստացվել են 7 և 8 մնացորդներ: Ո՞ր թվին են բաժանել այդ թվերը:

19. 860, 1432, 2017 թվերն ինչ-որ թվի բաժանելիս ստացվել են միևնույն մնացորդները: Ո՞ր թվին են բաժանել այդ թվերը:

20. Թիվը 3-ի և 4-ի բաժանելիս ստացված մնացորդների գումարը հավասար է 5-ի: Գտե՛ք այդ թիվը 12-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

21. Ապացուցե՛ք, որ 10-ի ցանկացած բնական աստիճանն 9-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1:

22. Ապացուցե՛ք, որ թիվը և դրա թվանշանների գումարն 9-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում են նույն թվերը:

23. 1-ից մինչև 1000 թվերից յուրաքանչյուրը փոխարինեցին իր թվանշանների գումարով: Ստացված թվերից յուրաքանչյուրը նորից փոխարինեցին իր թվանշանների գումարով՝ մինչև ստացվի միանիշ թիվ: Ստացված թվերի մեջ ո՞րն է ամենաշատը:

24. Գրատախտակին գրված է 4 թիվը: Յուրաքանչյուր վարկյանում այդ թվին գումարվում է իր թվանշանների գումարը: Կարո՞ղ է արդյոք որոշ ժամանակ հետո գրատախտակին ստացվել 123456 թիվը:

25. Ապացուցե՛ք, որ կենտ թվի քառակուսին 4-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1:

26. Ապացուցե՛ք, որ եթե բնական թիվը 7-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 6, ապա այդ թվի քառակուսին 7-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1:

27. Ի՞նչ մնացորդներ կարող են ստացվել, եթե բնական թվի քառակուսին բաժանենք՝

ա) 3-ի, բ) 4-ի, գ) 8-ի:

28. Ո՞ր թվանշանները կարող են լինել բնական թվի քառակուսու միավորների կարգում:

29. Գոյություն ունի՞ արդյոք բնական թիվ, որի քառակուսու վերջում լինի. ա) 48, բ) 51, գ) 469:

30. Ի՞նչ մնացորդ կստացվի.

ա) 7^{77} -ը 6-ի բաժանելիս,

բ) 11^{11} -ը 4-ի բաժանելիս,

գ) 2^{20} -ը 7-ի բաժանելիս:

31. Ապացուցե՛լ, որ՝

ա) $4^{17}+1$ բաժանվում է 5-ի,

բ) $5^{13}+2^{12}$ բաժանվում է 3-ի:

32. Ապացուցե՛ք, որ $14^{25}+25$ բաղադրյալ թիվ է:

33. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում.

ա) $5^n + 3$ բաժանվում է 4-ի, բ) $7^n + 5$ բաժանվում է 6-ի,

գ) $15^n - 1$ բաժանվում է 7-ի, դ) $9^n + 15$ բաժանվում է 24-ի:

34. Գտե՛ք.

ա) $3^{22} + 4^{21}$ թիվը 5-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

բ) $6^{19} + 2^{20}$ թիվը 7-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

35. Գտե՛ք 300-ը բոլոր երկնիշ թվերին բաժանելիս ստացված մնացորդներից ամենամեծը:

Թեմա 9. Պարզ թվեր

Պարզ անվանում են 1-ից մեծ այն թվերը, որոնք, 1-ից և իրենից բացի, այլ բաժանարար չունեն:

Պարզ թվեր են՝ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 և այլն:

Բաղադրյալ անվանում են այն թվերը, որոնք, 1-ից և իրենից բացի, ունեն այլ բաժանարարներ. օրինակ՝ 15-ը (բաժանվում է 3-ի): 1-ը ո՛չ պարզ թիվ է, ո՛չ էլ՝ բաղադրյալ:

Պարզ թվերի որոնման պարզագույն քայլաշարը (ալգորիթմ) մշակել է հույն մաթեմատիկոս Էրատոսթենեսը (Ք. ա. III դ.):

Քայլաշարը, որը բնական թվերի հաջորդականությունից աստիճանաբար ջնջում է բաղադրյալ թվերը, հայտնի է «Էրատոսթենեսի մաղ» անունով: «Էրատոսթենեսի մաղով» 100-ը չգերազանցող պարզ թվերը գտնելու նպատակով՝ հաջորդաբար գրենք 1-ից մինչև 100 թվերը: Այդ հաջորդականության առաջին թիվը՝ 1-ը, պարզ թիվ չէ, ուստի ջնջենք: Հաջորդ թիվը՝ 2-ը, պարզ թիվ է: Այդ թիվը թողնենք և 2-ին հաջորդող յուրաքանչյուր նրկրորդ թիվ՝ 4, 6, 8, ..., 98, 100, ջնջենք (գույգ թվերը՝ 2-ից բացի):

Հաջորդ չջնջված թիվը՝ 3-ը, պարզ թիվ է: Այդ թիվը թողնենք և հաջորդականությունից ջնջենք 3 թվի մյուս բազմապատիկները (կամ 3 թվի ու հաջորդականությունում 3 թվից սկսած յուրաքանչյուր չջնջված թվի արտադրյալը, եթե պատկանում է հաջորդականությանը): Այս քայլից հետո հաջորդականությունից կջնջենք նաև 3·3, 3·5, 3·7, 3·9, ..., 3·31, 3·33 թվերը:

Կատարելով քայլաշարը հաջորդ չջնջվող 5 և 7 թվերի դեպքում՝ հաջորդականությունից կջնջենք համապատասխանաբար 5·5, 5·7, 5·11, 5·13, 5·17, 5·19 և 7·7, 7·11, 7·13 արտադրյալները:

Ավարտելով քայլաշարը (քանի որ հաջորդ չջնջված թիվը 11-ն է, իսկ $11 \cdot 11 > 100$)՝ կունենանք 100-ից փոքր պարզ թվերի հաջոր-

դականությունը. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97:

«Էրատոսթենեսի մաղի» միջոցով պարզ թվերի ստացման եղանակը հնարավորություն է ընձեռում կատարելու մի քանի եզրահանգում:

Նկատենք, որ «Էրատոսթենեսի մաղի» յուրաքանչյուր քայլում բնական թվերի հաջորդականությունից ջնջում ենք ինչ-որ պարզ թվի որևէ բազմապատիկ՝ բաղադրյալ թիվ: Հետևաբար՝ յուրաքանչյուր բաղադրյալ թիվ ունի պարզ բաժանարար (բաժանարար, որը պարզ թիվ է): Ներկայացնենք նշված հատկության այլ ապացույց:

Թեորեմ 1. 1-ից մեծ ցանկացած n բնական թիվ ունի պարզ բաժանարար:

Ապացուցում: Եթե n -ը պարզ թիվ է, ապա հենց n -ը կլինի իր պարզ բաժանարարը: Իսկ եթե n -ը բաղադրյալ թիվ է, ապա կունենա 1-ից մեծ և իրենից փոքր n_1 բաժանարար: Եթե n_1 -ը պարզ թիվ է, ապա թեորեմն ապացուցված է: Հակառակ դեպքում n_1 -ը կլինի բաղադրյալ և, հետևաբար՝ կունենա 1-ից մեծ և n_1 -ից փոքր n_2 բաժանարար: Քանի որ n -ը բաժանվում է n_1 -ի, իսկ n_1 -ը՝ n_2 -ի, ուստի թվերի բաժանման հատկությունից ելնելով, n_2 -ը կլինի նաև n -ի բաժանարար: Այդ գործողությունը կրկնենք, քանի դեռ n_2 -ը բաղադրյալ թիվ է (եթե n_2 -ը լինի պարզ թիվ, ապա թեորեմն ապացուցված է): Նկատենք, որ յուրաքանչյուր անգամ գործողությունը կրկնելիս ստանում ենք n թվի ավելի փոքր բաժանարար, քան նախորդ քայլում: Բայց այդ գործողությունը չի կարող անվերջ շարունակվել, քանի որ n -ից փոքր բնական թվերի քանակը վերջավոր է: Հետևաբար՝ վերջավոր քայլերից

հետո կստանանք n -ի պարզ բաժանարար: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2. Ցանկացած $n > 1$ բնական թվի ամենափոքր և 1-ից մեծ բաժանարարը պարզ թիվ է:

Ապացուցում: Հեշտ է նկատել, որ եթե n -ը պարզ թիվ է, ապա թեորեմի պնդումը ճիշտ է (բացատրե՛ք): Դիտարկենք այն դեպքը, երբ n -ը բաղադրյալ թիվ է: Դիցուք՝ n_1 -ն n -ի ամենափոքր բաժանարարն է: Ենթադրենք հակառակը՝ n_1 -ը բաղադրյալ թիվ է: Այդ դեպքում n_1 -ը կունենա 1-ից տարբեր և իրենից փոքր n_2 բաժանարար: Բայց, թվերի բաժանման հատկությունից ելնելով՝ n_2 -ը կլինի նաև n -ի բաժանարար, և որը փոքր է n_1 -ից: Ստացված հակասությունն էլ ապացուցում է թեորեմը:

Ըստ «Էրատոսթենեսի մաղի» քայլաշարի՝ որևէ պարզ թվի բազմապատիկները ջնջելուց հետո բնական թվերի հաջորդականությունում այդ թվին հաջորդող չջնջված թիվը պարզ թիվ է: Եթե այդ թիվը նշանակենք P -ով, ապա նկատենք, որ դրանից հետո հաջորդականությունում ջնջվող ամենափոքր թիվը P^2 -ն է (P -ի չջնջված բազմապատիկներից առաջինը): Հետևաբար՝ P^2 -ուց փոքր ցանկացած ջնջված թիվ (1-ից բացի) բաղադրյալ թիվ է և ունեցել է P -ից փոքր պարզ բաժանարար (P -ից փոքր պարզ թվի բազմապատիկ է): Հետևաբար՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 3. Ցանկացած բաղադրյալ n թիվ ունի պարզ բաժանարար, որի քառակուսին մեծ չէ n -ից:

Ապացուցում: Քանի որ n -ը բաղադրյալ թիվ է, հետևաբար՝ կարող է գրվել 1-ից մեծ a և b թվերի արտադրյալով՝ $n = a \cdot b$: Որոշակիության համար ենթադրենք, թե a -ն չի գերազանցում b -ն՝ $a \leq b$: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ a -ն ունի պարզ բաժանարար՝ P : Այդ

դեպքում կունենանք՝ $P^2 = P \cdot P \leq a \cdot a \leq a \cdot b = n$, այսինքն՝ $P^2 \leq n$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք. Եթե 1-ից մեծ n բնական թիվը չի բաժանվում այն պարզ թվերից և ոչ մեկին, որոնց քառակուսիները չեն գերազանցում n -ը, ապա n -ը պարզ թիվ է:

Ենթադրենք՝ պետք է ոչ շատ փոքր բնական թվի համար որոշել՝ դա պարզ թիվ է, թե՞ ոչ: Առաջին հայացքից թվում է, թե հարկավոր է մեկ առ մեկ ստուգել՝ բաժանվո՞ւմ է արդյոք այդ թիվն իրենից փոքր որևէ թվի:

Վերոհիշյալ թեորեմները հնարավորություն են ընձեռնում, քիչ ստուգումներ կատարելով, պարզելու տրված թվի պարզ կամ բաղադրյալ լինելը:

Օրինակ. Որպեսզի որոշենք՝ 113-ը պարզ թիվ է, թե՞ ոչ, բավական է ստուգել, թե 113-ը բաժանվո՞ւմ է արդյոք 11-ից փոքր ($11^2 > 113$) պարզ թվերից որևէ մեկի՝ 2-ի, 3-ի, 5-ի, 7-ի:

Թեորեմ 4. (Թվաբանության հիմնական թեորեմ): Ցանկացած բաղադրյալ թիվ կարելի է ներկայացնել պարզ թվերի արտադրյալի տեսքով:

Ապացուցում: Դիցուք՝ a -ն բաղադրյալ թիվ է: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ a -ն ունի պարզ բաժանարար, որը եթե նշանակենք P_1 -ով, կունենանք՝ $a = P_1 \cdot a_1$: Նկատենք, որ $a > a_1$: Կիրառելով թեորեմ 1-ը a_1 թվի դեպքում (եթե a_1 -ը բաղադրյալ թիվ է)՝ կունենանք $a_1 = P_2 \cdot a_2$, որտեղ P_2 -ն a_1 -ի պարզ բաժանարար է: Հետևաբար՝ $a = P_1 \cdot P_2 \cdot a_2$ և $a_1 > a_2$: Եթե a_2 -ը բաղադրյալ թիվ է, նորից կիրառելով թեորեմ 1-ը՝ կունենանք, որ $a_2 = P_3 \cdot a_3$, $a = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot a_3$ և $a > a_1 > a_2 > a_3$: Այդ գործողությունը կշարունակենք այնքան (անվերջ շարունակվել չի կարող, քանի որ a -ից փոքր

բնական թվերի քանակը վերջավոր է), մինչև a_k -ն լինի պարզ թիվ:
Նշանակելով $a_k = P_k$ ՝ կունենանք՝ $a = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_k$:

Նկատենք, որ պարզ արտադրիչների ստացված վերլուծության մեջ կարող են մի քանի անգամ հանդիպել հավասար արտադրիչներ:

Այդ դեպքում թիվը կգրվի $a = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n}$ տեսքով, որն անվանում են թվի արտադրիչների վերլուծման կանոնական տեսք:

Օրինակ. $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, հետևաբար՝ 720-ի կանոնական տեսքն է՝ $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$:

P պարզ թվի կանոնական տեսքը կլինի P -ն:

Թեորեմ 5. Յուրաքանչյուր թիվ կանոնական տեսքով գրվում է միակ ձևով (արտադրիչների կարգի ճշտությամբ):

Ապացուցում: Դիցուք՝ որևէ թիվ ունի երկու կանոնական վերլուծություն.

$$P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$$

Հավասարության ձախ մասը բաժանվում է P_1 -ի: Հետևաբար՝ աջ մասը նույնպես պետք է բաժանվի P_1 -ի: Քանի որ P_1 -ը պարզ թիվ է, հետևաբար՝ $q_1, q_2, \dots, q_m$ թվերից որևէ մեկը՝ q_k -ն, պետք է բաժանվի P_1 -ի: Բայց q_k -ն նույնպես պարզ թիվ է, հետևաբար՝ $q_k = P_1$: Հավասարության երկու մասերը կրճատենք P_1 -ով:

Եթե նույն դատողությունները կատարենք $P_2, \dots, P_n$ թվերի համար, ապա ի վերջո կստանանք $l=1$ հավասարությունը: Հետևաբար՝ երկու վերլուծությունները կհամընկնեն:

Արդյոք կա՞մենամեծ պարզ թիվ: Այդ հարցին պատասխանում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 6. Պարզ թվերի բազմությունն անվերջ է:

Ապացուցում: Ապացուցումը կատարենք հակասող ենթադրության մեթոդով:

Ենթադրենք՝ պարզ թվերի քանակը վերջավոր է՝ $2, 3, 5, 7, 11, \dots, P$ (համարենք՝ P -ն ամենամեծ պարզ թիվն է):

Դիտարկենք $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot P + 1$ թիվը: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ a -ն պետք է ունենա առնվազն մեկ պարզ բաժանարար: Մյուս կողմից՝ a -ն չի բաժանվում նշված պարզ թվերից ոչ մեկին (բացատրենք՝ ինչո՞ւ): Բայց, ըստ մեր ենթադրության՝ այնտեղ գրված են բոլոր պարզ թվերը:

Ստացանք հակասություն. հետևաբար՝ ամենամեծ պարզ թիվ չկա, այսինքն՝ պարզ թվերի բազմությունն անվերջ է:

Խնդիրներ և վարժություններ

1. Գտե՛ք այն ուղղանկյան պարագիծը, որի կողմերը բնական թվեր են, իսկ մակերեսը հավասար է 19-ի:

2. Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է n -ի, իսկ կողմերը բնական թվեր են: Գտե՛ք ուղղանկյան պարագիծը, եթե՝
ա) $n=21$,
բ) $n=23$:

Ի՞նչ պայմանի պետք է բավարարի n -ը, որ խնդիրն ունենա միակ լուծում:

3. Գտե՛ք 20-ից մեծ և 40-ից փոքր բոլոր պարզ թվերը:

4. Գտե՛ք ամենամեծ երկնիշ և ամենաափոքր եռանիշ պարզ թվերը:

5. «Էրատոսթենեսի մաղով» գտե՛ք 150-ից փոքր բոլոր պարզ թվերը:

6. Քանի՞ 0-ով է վերջանում 1000-ից փոքր բոլոր պարզ թվերի արտադրյալը:

7. Դիցուք՝ A -ն 100-ից փոքր բոլոր պարզ թվերի արտադրյալն է։ Ի՞նչ մնացորդ կստացվի, եթե A -ն բաժանենք՝

ա) 4-ի, բ) 97-ի, գ) 221-ի:

8. Ապացուցե՛ք, որ 1-ից մեծ ցանկացած թվի ամենափոքր և 1-ից տարբեր բաժանարարը պարզ թիվ է :

9. Քանի՞ բաժանարար ունի.

ա) պարզ թվի քառակուսին,

բ) իրարից տարբեր երկու պարզ թվերի արտադրյալը:

10. Գտե՛ք 1000-ից փոքր այն բոլոր թվերի քանակը, որոնք ունեն Δ իշտ երեք հատ բաժանարար:

11. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած երկնիշ բաղադրյալ թիվ ունի միանիշ պարզ բաժանարար:

12. Գտե՛ք մեկը մյուսի չբաժանվող երեք թվեր՝ այնպես, որ դրանցից յուրաքանչյուրը լինի մյուս երկու թվերի արտադրյալի բաժանարար:

13. 1333 թվի պարզ լինելը ստուգելու նպատակով՝ այդ թիվն սկսեցին բաժանել 2, 3, 5, 11, ... պարզ թվերին: Մինչև n -ր թիվը պետք է կատարել բաժանումը:

14. Կիրառելով նախորդ խնդրում նշվածը՝ ստուգե՛ք թվերից որո՞նք են պարզ.

ա) 221 բ) 283 գ) 323 դ) 899

ե) 947 զ) 1147 է) 1367

15. Կարո՞ղ են արդյոք p և $p+7$ թվերը միաժամանակ լինել պարզ թվեր:

16. Կարո՞ղ է արդյոք երեք հաջորդական թվերի գումարը լինել պարզ թիվ:

17. Գտե՛ք երեք հաջորդական կենտ թվեր, որոնք լինեն պարզ թվեր: Քանի՞ այդպիսի եռյակ գոյություն ունի:

18. Գտե՛ք երկու պարզ թիվ այնպես, որ դրանց և՛ գումարը, և՛ տարբերությունը լինեն պարզ թվեր:

19. Ապացուցե՛ք, որ եթե $p > 2$ պարզ թիվ է, ապա $p-1$ և $p+1$ թվերից մեկը բաժանվում է 4-ի:

20. Ապացուցե՛ք, որ 3-ից մեծ ցանկացած պարզ թիվ կարելի է ներկայացնել $6n+1$ կամ $6n+5$ տեսքով:

21. Գտե՛ք այն բոլոր p թվերը, որոնց դեպքում հետյալ թվերը պարզ են.

ա) p , $p+4$, $p+8$ բ) p , $2p+1$, $4p+1$

22. Գտե՛ք այն բոլոր p պարզ թվերը, որոնց դեպքում $2p^2+1$ պարզ թիվ է:

23. Գոյություն՞ն ունի արդյոք այնպիսի p բնական թիվ, որի դեպքում հետևյալ թվերը լինեն պարզ թվեր.

ա) $p-50$, p , $p+50$ բ) $p-100$, p , $p+100$

24. Գտե՛ք այն բոլոր p պարզ թվերը, որոնց դեպքում $p+6$, $p+8$, $p+12$, $p+14$ թվերը նույնպես պարզ թվեր են:

25. Ապացուցե՛ք, որ եթե $p > 3$ պարզ թիվ է, ապա p^2-1 բաժանվում է 24-ի:

26. Ապացուցե՛ք, որ պարզ թվերի բազմությունն անվերջ են:

27. Ապացուցե՛ք, որ պարզ թիվը 30-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1 կամ պարզ թիվ:

28. Պարզ թիվը 60-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվել է բաղադրյալ թիվ: Գտե՛ք այդ մնացորդը:

29. Կարո՞ղ են արդյոք 10 հաջորդական թվերից 6-ը լինել պարզ թվեր:

30. Գտե՛ք 10 հաջորդական թվեր, որոնցից 5-ը լինեն պարզ թվեր: Քանի՞ այդպիսի հաջորդականություն կա:

31. Գտե՛ք 10 հաջորդական բաղադրյալ թվեր:

32. Գոյություն ունեն՞ արդյոք 100 հաջորդական բաղադրյալ թվեր:

33. Գտե՛ք երեք հաջորդական թվեր այնպես, որ յուրաքանչյուրն ունենա 4 հատ բաժանարար:

34. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն չունեն 4 հաջորդական բնական թվեր այնպես, որ յուրաքանչյուրն ունենա 4 հատ բաժանարար:

35. Գտե՛ք 5 պարզ թվեր այնպես, որ ցանկացած երկու հարևանի տարբերությունը լինի 6: Գոյություն ունի՞ արդյոք այդ պայմանին բավարարող 6 պարզ թիվ:

Թեմա 10. Զույգություն

Տրամաբանական և ապացուցման բնույթի մի շարք խնդիրներում հաճախ ի հայտ են գալիս մեծություններ, որոնց արժեքները խնդրի պայմաններում փոփոխվում են ինչ-որ օրինաչափությամբ, որը կապված է զույգ կամ կենտ հասկացությունների հետ: Չնայած զույգ և կենտ հասկացությունները պարզ և մատչելի են, բայց դրանք կիրառելիս անհրաժեշտ է լինում կատարել բարդ տրամաբանական քայլեր:

Մաթեմատիկայում ընդունված է ասել, որ երկու թվեր ունեն նույն զույգությունը, եթե երկուսն էլ զույգ կամ երկուսն էլ կենտ թվեր են:

Ներկայացնենք զույգ և կենտ թվերի մի քանի պարզունակ հատկություններ, որոնք օգտակար կլինեն նման բնույթի խնդիրները լուծելիս: Այդ հատկությունների հիմնավորումը թողում ենք ընթերցողին:

ա) Ցանկացած թվի և զույգ թվի արտադրյալը զույգ է:

բ) Երկու կենտ թվերի արտադրյալը կենտ թիվ է:

գ) Տարբեր զույգությամբ երկու թվերի (մեկը զույգ թիվ է, մյուսը՝ կենտ), և՛ գումարը, և՛ տարբերությունը կենտ են:

դ) Նույն զույգությամբ երկու թվերի (երկուսն էլ զույգ են, կամ երկուսն էլ՝ կենտ) և՛ գումարը, և՛ տարբերությունը զույգ են:

Նշենք, որ ա) - դ) հատկություններից յուրաքանչյուրի հակադարձը նույնպես ճիշտ է:

ե) Թվի զույգությունը չի փոխվում, եթե գումարենք կամ հանենք զույգ թիվ:

զ) Թվի զույգությունը փոխվում է, եթե գումարենք կամ հանենք կենտ թիվ:

Է) Երկու թվերի գումարը և տարբերությունն ունեն նույն գույգությունը.

Իրո՛ք՝ եթե երկու թվերի տարբերությանը գումարենք հանելիի կրկնապատիկը (գույգ թիվ), ապա կստանանք դրանց գումարը (հատկություն Ե):

ը) Մի քանի թվի գումարը և դրա կենտ գումարելիների քանակն ունեն նույն գույգությունը:

Իրո՛ք՝ եթե կենտ գումարելիների քանակը լինի գույգ, ապա դրանց գումարը կլինի գույգ թիվ (հատկություն Է), իսկ այդ քանակը կենտ լինելու դեպքում՝ նշված գումարը կլինի կենտ (հատկություն Գ): Եթե այդ գումարին գումարենք մնացած գումարելիները, որոնք գույգ թվեր են, ապա այդ գումարի գույգությունը չի փոխվի (հատկություն Ե):

Դիտարկենք խնդիրներ.

Խնդիր 1. Գրատախտակին շարքով գրված է 12 հատ 1: Հնարավո՞ր է արդյոք նրանց միջև դնել «+» կամ «-» նշաններն այնպես, որ ստացված արտահայտության արժեքը հավասար լինի 3-ի:

Լուծում: Եթե բոլոր նշանները լինեն «+», ապա արտահայտության արժեքը հավասար կլինի 12-ի, որը գույգ թիվ է: Եթե նշաններից մեկը փոխենք՝ դարձնենք «-», ապա արտահայտության արժեքը կնվազի 2-ով (1 գումարելու փոխարեն՝ հանում ենք) և կդառնա 10, որը նույնպես գույգ թիվ է: Նշանակում է՝ ինչքան էլ «+» նշաններ փոխենք «-» -ով, միևնույն է՝ ստացված արտահայտությունների արժեքները կլինեն գույգ թվեր (կունենան նույն գույգությունը): Հետևաբար՝ արտահայտության արժեքը կենտ թիվ, մասնավորապես՝ 3, չի ստացվի:

Խնդիր 2. Մորելին ուղղագիծ ճանապարհի երկայնքով շարժվում է ցատկելով ետ կամ առաջ: Յուրաքանչյուր ցատկի երկարությունը 5 սմ կամ 7 սմ է: Կարո՞ղ է արդյոք 20 ցատկից մորելը հայտնվել սկզբնական դիրքից 15 սմ հեռավորության վրա:

Լուծում: Դիտարկենք մորելի հեռավորությունն սկզբնական կետից յուրաքանչյուր ցատկից հետո: Նկատենք, որ առաջին ցատկից հետո իր հեռավորությունն սկզբնական դիրքից կլինի կենտ թիվ, իսկ երկրորդ ցատկից հետո կլինի գույգ թիվ, երրորդ ցատկից հետո՝ նորից կենտ թիվ, իսկ չորրորդ ցատկից հետո՝ կրկին գույգ թիվ, և այդպես շարունակ:

Հետևաբար՝ գույգ քանակով քայլերից հետո՝ 20 ցատկից հետո, մորելը չի կարող լինել սկզբնականից կենտ, մասնավորապես՝ 15 սմ հեռավորության վրա:

Նկատենք, որ խնդիր 1-ում դիտարկվող մեծությունը՝ արտահայտության արժեքը, յուրաքանչյուր քայլից հետո չի փոխում իր գույգությունը: Այլ օրինաչափության է ենթարկվում խնդիր 2-ում դիտարկվող մեծությունը՝ մորելի հեռավորությունը սկզբնական դիրքից: Յուրաքանչյուր քայլից հետո գույգությունը փոխվում է:

Խնդիրներ

1. Պարզե՛ք երկու բնական թվերի գույգ կամ կենտ լինելու բոլոր հնարավոր դեպքերը, եթե հայտնի է, որ դրանց՝

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| ա) գումարը գույգ է, | բ) արտադրյալը գույգ է, |
| գ) արտադրյալը կենտ է, | դ) գումարը կենտ է: |

2. Երկու բնական թվերի գումարը կենտ է: Ինչպիսի՞ն կլինի դրանց՝

- | | |
|--------------------|----------------|
| ա) տարբերությունը, | բ) արտադրյալը: |
|--------------------|----------------|

3. Երկու բնական թվերի արտադրյալը բազմապատկում են այդ թվերի տարբերությամբ: Կարո՞ղ է արդյոք ստացվել 29657143:

4. Կարո՞ղ են արդյոք 4 թվերի ն՛ գումարը, և՛ արտադրյալը լինել կենտ: Ճի՞շտ է արդյոք այդ պնդումը 5 թվերի դեպքում:

5. Ցանկապատի երկայնքով աճում է մորու 8 թուփ: Յուրաքանչյուր հարևան թփերի հատապտուղների քանակները տարբերվում են 1-ով: Կարո՞ղ է արդյոք բոլոր թփերի հատապտուղների ընդհանուր քանակը լինել 161:

6. Զույգ է, թե՞ կենտ $1+2+3+\dots+99$ գումարը:

7. Իրար կողք գրված 1-ից մինչև 2014 թվերի միջև դրվում են «+» կամ «-» նշանները և հաշվվում ստացված արտահայտության արժեքը: Պարզե՞ք թե՛

ա) զո՞ւյգ, թե՞ կենտ կլինի արտահայտության արժեքը, եթե դրվի միայն «+» նշանը,

բ) հնարավո՞ր է արդյոք այդ նշանները դնել այնպես, որ արտահայտության արժեքը լինի հավասար 0-ի:

8. Մորեխն ուղղազիծ ճանապարհի երկայնքով շարժվում է՝ ցատկելով ետ կամ առաջ: Յուրաքանչյուր ցատկի երկարությունն 9 սմ կամ 13 սմ է: Կարո՞ղ է արդյոք 25 ցատկից հետո մորեխը հայտնվել սկզբնական դիրքում:

9. Մորեխն ուղղազիծ ճանապարհի երկայնքով շարժվում է ցատկերով: Առաջին ցատկի երկարությունը 1 սմ է, երկրորդինը՝ 2 սմ, երրորդինը՝ 3 սմ, և այդպես շարունակ: Կարո՞ղ է արդյոք նա 14 ցատկից հետո լինել սկզբնական դիրքում: Իսկ 12 ցատկից հետո՞:

10. Գրատախտակին գրված են 101 ամբողջ թվեր: Ապացուցե՛ք, որ այդ թվերից կարելի է ջնջել մեկ թիվ այնպես, որ

մնացած թվերի գումարը լինի գույգ թիվ: Ճիշտ է արդյոք նույն պնդումը 100 թվերի դեպքում:

11. 22 ամբողջ թվերի արտադրյալը հավասար է 1: Ապացուցե՛ք, որ այդ թվերի գումարը չի կարող 0 լինել:

12. Հնարավո՞ր է արդյոք 1-ից մինչև 21 բնական թվերը բաժանել մի քանի խմբի այնպես, որ յուրաքանչյուր խմբի ամենամեծ թիվը հավասար լինի այդ խմբի մնացած թվերի գումարին:

13. Գրատախտակին գրված են 1-ից մինչև 101 թվերը: Թույլատրվում է ջնջել այդ թվերից որևէ երկուսը և փոխարենը գրել դրանց տարբերությունը: Այդ գործողությունը կատարվում է այնքան անգամ, մինչև գրատախտակին մնա մեկ թիվ: Հնարավո՞ր է արդյոք, որ այդ թիվը լինի 0-ն:

14. Սեղանին դրված են մետաղադրամների 6 խումբ, ընդ որում՝ առաջին խմբում կա 1 մետաղադրամ, երկրորդում՝ 2, երրորդում՝ 3, չորրորդում՝ 4, հինգերորդում՝ 5, իսկ վեցերորդում՝ 6 մետաղադրամ: Թույլատրվում է յուրաքանչյուր քայլում խմբերից որևէ երկուսում ավելացնել մեկական մետաղադրամ: Հնարավո՞ր է արդյոք, որ ինչ-որ քայլից հետո բոլոր խմբերում լինեն հավասար քանակությամբ մետաղադրամներ:

15. 99 քարտերի վրա գրված են 1-ից մինչև 99 բոլոր թվերը (յուրաքանչյուր քարտի վրա գրված է մեկ թիվ): Քարտերը խառնում, շրջում են և դրանց մաքուր կողմի վրա նորից գրում են 1-ից մինչև 99 թվերը: Այնուհետև յուրաքանչյուր քարտի երկու կողմերում գրված թվերը գումարում են իրար, և ապա՝ ստացված բոլոր թվերը բազմապատկում իրար: Ապացուցե՛ք, որ արդյունքում կստացվի գույգ թիվ:

16. 7×7 աղյուսակի յուրաքանչյուր վանդակում գրված է ամբողջ թիվ այնպես, որ յուրաքանչյուր տողում գրված թվերի արտադրյալը բացասական է: Ապացուցե՛լ, որ կգտնվի աղյուսակի այնպիսի սյունակ, որում գրված բոլոր թվերի արտադրյալը նույնպես կլինի բացասական: Ճիշտ է արդյոք խնդիրը 8×8 աղյուսակի դեպքում: Պատասխանը հիմնավորել:

17. Հերթականությամբ գրված են 1, 2, 3 ... 49, 50 թվերը: Թույլատրվում է փոխել երկու թվերի տեղերը, եթե դրանց միջև կա ճիշտ մեկ թիվ (օրինակ՝ փոխել 3 և 5 թվերի տեղերը): Կարելի՞ է արդյոք այդպիսի տեղափոխություններով թվերը դասավորել հակառակ կարգով՝ 50, 49, ..., 3, 2, 1:

18. Այգու ծառերից մեկի վրա աճել 25 բանան, մյուսի վրա՝ 30 նարինջ: Այգեպանը ամեն օր քաղում է երկու միրգ: Եթե նա քաղում է տարբեր տեսակի միրգ, ապա դրանց փոխարեն աճում է բանան, իսկ եթե քաղում է միևնույն տեսակի միրգ՝ աճում է նարինջ: Ի վերջո ծառի վրա մնացել է մեկ միրգ: Ի՞նչ միրգ է մնացել:

19. Առանց հակադիր անկյունային վանդակների շախմատի դաշտը հնարավոր է արդյոք կտրատել դաշտի երկու վանդականոց ուղղանկյունների:

20. Տրված են 5 թիվ այնպես, որ ցանկացած երեքի գումարը զույգ է: Ապացուցե՛ք, որ բոլոր թվերն էլ զույգ:

Թեմա 11. Պարբերական տասնորդական կոտորակ

XV-XVI դարերում, թվերի հետ գործողությունները հեշտացնելու նպատակով, մաթեմատիկայում սկսեցին դիտարկել «որոշակի» հայտարարով սովորական կոտորակները: Դա հիմք հանդիսացավ՝ բոլոր թվերի համար ստեղծել տասնորդական գրելաձև, որում յուրաքանչյուր թիվ ունեցավ միակ գրելաձև, և որը հարմար է թվերը համեմատելիս և դրանց հետ գործողություններ կատարելիս:

1. Սովորական կոտորակի վերածումը տասնորդական կոտորակի

6-րդ դասարանի մաթեմատիկայի դասընթացից ձեզ հայտնի է, որ սովորական կոտորակը, որի հայտարարը հավասար է 10, 100, 1000 և այլն (10 թվի որևէ աստիճան), ներկայացվում է տասնորդական կոտորակով:

$$\text{Օրինակ՝ } \frac{7}{10} = 0,7 \quad , \quad \frac{61}{1000} = 0,061 \quad :$$

Հետևաբար՝ **վերջավոր տասնորդական կոտորակով կներկայացվեն այն սովորական կոտորակները, որոնք հնարավոր կլինի բերել 10, 100, 1000 և այլ հայտարարից որևէ մեկին:** Նշված թվերից յուրաքանչյուրը 2-ի և 5-ի հավասար ցուցիչներով աստիճանների արտադրյալներ են՝ $10=2 \cdot 5$, $100=2^2 \cdot 5^2$, $1000=2^3 \cdot 5^3$ և այլն: Դա հնարավորություն է ընձեռում, որ այն սովորական կոտորակները, որոնց հայտարարը 2 և 5 թվերի աստիճանների արտադրյալ է, գրել վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ համարիչը և հայտարարը բազմապատկելով 2-ի կամ 5-ի <պակասող> աստիճաններով:

$$\text{Օրինակ. } \frac{7}{25} = \frac{7}{5^2} = \frac{7 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{28}{100} = 0,28 \quad , \quad \frac{9}{40} = \frac{9}{2^3 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{225}{1000} = 0,225 \quad :$$

Քանի որ կոտորակները մի տեսակից մյուսին անցնելիս մեկի ամբողջ մասը նույնությամբ գրվում է մյուսի ամբողջ մասում, ուստի կոտորակներ այնպիսի կոտորակներ, որոնց ամբողջ մասը 0 է:

Դիցուք՝ $\frac{p}{q}$ ($p < q$) սովորական կոտորակը ներկայացվել է 0, n տասնորդական կոտորակով, որտեղ n-ն ունի k նիշ: Այս դեպքում $\frac{p}{q} = \frac{n}{10^k}$ հավասարությունից կստանանք՝ $n = \frac{p \cdot 10^k}{q}$: Վերջինս նշանակում է, որ $\frac{p}{q}$ սովորական կոտորակը տասնորդական կոտորակով ներկայացնելու համար պետք է $p \cdot 10^k$ բաժանել q-ի կամ, որ նույնն է, p-ն բաժանել q-ի՝ տասնորդական կոտորակը բնական թվի բաժանման կանոնով:

Օրինակ. $\frac{5}{8}$ տասնորդական կոտորակով ներկայացնելու նպատակով 5,0 անկյունով բաժանենք 8-ի.

$$\begin{array}{r|l} 5,0 & 8 \\ \hline 48 & 0,625 \\ \hline 20 & \\ 16 & \\ \hline 40 & \\ 40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Հետևաբար՝ $\frac{5}{8} = 0,625$:

2. Անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ

Նկատենք, որ եթե $\frac{p}{q}$ անկրճատելի սովորական կոտորակի հայտարարը ունի, 2-ից և 5-ից բացի, այլ պարզ արտադրիչ, ապա այդ կոտորակը հնարավոր չէ բերել 10^k տեսքի հայտարարի (խանգարող արտադրիչը միշտ կմնա հայտարարում), հետևաբար՝ հնարավոր չէ գրել վերջավոր տասնորդական կոտորակով: Նշված պայմանի դեպքում փորձենք սովորական

կոտորակը տասնորդական կոտորակ դարձնել անկյունային բաժանման միջոցով: Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1. $\frac{5}{6}$ անկրճատելի սովորական կոտորակ է, որի հայտարարն ունի 2-ից և 5-ից տարբեր պարզ բաժանարար՝ 3-ը: Հետևաբար՝ այդ կոտորակը հնարավոր չէ ներկայացնել վերջավոր տասնորդական կոտորակով: Դրանում համոզվելու նպատակով՝ համարիչը անկյունով բաժանենք հայտարարին.

$$\begin{array}{r}
 5,0 \mid 6 \\
 \underline{48} \mid 0,8333... \\
 20 \\
 \underline{18} \\
 20 \\
 \underline{18} \\
 2 \\

 \end{array}$$

Նկատենք, որ բաժանման յուրաքանչյուր քայլում՝ երկրորդից սկսած, մնացորդում ստացվում է միայն 2, որին կցագրվում է 0, իսկ քանորդում ստացվում է միայն 3: Հետևաբար՝ այդ բաժանումը վերջ չունի և հանգեցնում է 0,8333... արտահայտության, որտեղ բազմակետը նշանակում է, որ 3 թվանշանն անվերջ անգամ կրկնվում է:

0,8333... արտահայտությունն անվանում են անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ (երբեմն՝ պարբերական կոտորակ), իսկ 3-ը՝ կոտորակի պարբերություն: Գրում են հետևյալ տեսքով՝ $\frac{5}{6} = 0,8333 \dots = 0,8(3)$, և կարդացվում է այսպես՝ <0 ամբողջ, 8 տասնորդական և 3-ը պարբերության մեջ>:

Օրինակ 2. Դիտարկենք $\frac{7}{33}$ կոտորակի դեպքը.

$$\begin{array}{r|l}
 7.0 & 33 \\
 \hline
 66 & 0,2121... \\
 \hline
 40 & \\
 33 & \\
 \hline
 70 & \\
 66 & \\
 \hline
 40 & \\
 33 & \\
 \hline
 7 & \\
 & ...
 \end{array}$$

Այս օրինակում նկատենք, որ բաժանման ընթացքում մնացորդում հաջորդաբար ստացվում են 4 և 7, որոնց կցագրվում են միայն 0, իսկ քանորդում ստացվում են 1 և 2: Հետևաբար՝ բաժանման գործողությունն անվերջ կշարունակվի և, ի վերջո՝ ստանում ենք $0,212121\dots$, որն անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ է՝ 21 պարբերությամբ, և գրում ենք, որ $\frac{7}{33} = 0,(21)$:

Կատարենք ընդհանուր եզրակացություն:

Եթե $\frac{p}{q}$ անկրճատելի սովորական կոտորակի հայտարարը ունի, 2-ից և 5-ից բացի, այլ պարզ բաժանարար, ապա p -ն q -ի անկյունային բաժանումն անվերջ շարունակվում է: Քանի որ p թիվը q -ի բաժանելիս հնարավոր մնացորդների քանակը վերջավոր է (մնացորդը փոքր է q -ից), և p -ն q -ի բաժանումը անվերջ շարունակվում է, հետևաբար՝ բաժանման ընթացքում ստացվող մնացորդների մեջ կլինեն առնվազն երկու հավասար թվեր, ընդ որում՝ դրանց կցագրվում է 0 թվանշանը: Հետևաբար՝ այդ մնացորդներից, երկրորդից սկսած, բաժանման քայլերում ստացվող քանորդները և մնացորդները կլինեն նույնը, ինչ որ առաջին թվի դեպքում: Այսինքն՝ բաժանման այդ հատվածը պարբերաբար կկրկնվի: **Որպես արդյունք՝ $\frac{p}{q}$ կոտորակը կվերածվի անվերջ պարբերական կոտորակի:** Առաջին թվի

բաժանումից սկսած մինչև երկրորդ թիվը բաժանման ընթացքում ստացված քանորդների նիշերից նույն հերթականությամբ կազմված թվանշանների խումբն անվանում են պարբերություն, իսկ վերջինիս նիշերի քանակը՝ պարբերության երկարություն:

Օրինակ 3. $\frac{57}{148}$ ներկայացնենք անվերջ պարբերական կոտորակի տեսքով.

$$\begin{array}{r|l} 57,0 & 148 \\ \hline 444 & 0,385135... \\ \hline 1260 & \\ \hline 1184 & \\ \hline 760 & \\ \hline 740 & \\ \hline 200 & \\ \hline 148 & \\ \hline 520 & \\ \hline 444 & \\ \hline 760 & \\ \hline 740 & \\ \hline \dots & \end{array}$$

Հետևաբար՝ $\frac{57}{148} = 0,38(513)$, իսկ դրա պարբերությունը հավասար է 513-ի:

Նշենք, որ ցանկացած ամբողջ թիվ n և վերջավոր տասնորդական կոտորակ կարելի է համարել անվերջ պարբերական կոտորակ՝ 0 պարբերությամբ:

Օրինակ. $17 = 17,000... = 17,(0)$, կամ $23,7 = 23,7000... = 23,7(0)$:

Նշենք նաև, որ սովորական կոտորակը տասնորդական կոտորակ դարձնելիս, չնայած 9 պարբերության ոչ մի դեպքում չի ստացվում, սակայն երբեմն հարմար է դիտարկել 9 պարբերությամբ տասնորդական կոտորակ՝ համարելով, որ $1 = 0,(9)$:

Օրինակ. $2 - 0,(573) = 1,(999) - 0,(573) = 1,(426)$:

Ներկայացնենք մի քանի ուշագրավ փաստեր.

1. Եթե q -ն և 10-ը փոխադարձաբար պարզ թվեր են, ապա $\frac{p}{q}$ անկրճատելի կոտորակի տասնորդական վերլուծությունում

պարբերությունն սկսվում է անմիջապես ստորակետից հետո: Այդպիսի դեպքում կոտորակն անվանում են պարզ պարբերական կոտորակ:

Օրինակ. $\frac{5}{7} = 0,(714285) :$

2. q հայտարարով բոլոր անկրճատելի $\frac{p}{q}$ սովորական կոտորակների տասնորդական վերլուծությունների պարբերություններն ունեն նույն երկարությունը, որը $(q-1)$ -ի բաժանարար է:

Օրինակ. Քանի որ $\frac{1}{13} = 0,(076923)$, հետևաբար՝ 13 հայտարարով բոլոր կանոնավոր կոտորակների տասնորդական վերլուծությունների երկարությունները հավասար են 6-ի, որը $13-1=12$ -ի բաժանարար է:

3. Պարբերական տասնորդական կոտորակի ձևափոխումը սովորական կոտորակի

Դիցուք՝ $0,(67)$ պարբերական կոտորակը պետք է ձևափոխել սովորական կոտորակի:

Կատարենք $a = 0,(67)$ նշանակումը:

$a = 0,676767\dots$ հավասարության երկու մասը բազմապատկենք 100-ով, կստանանք.

$$100 a = 67,6767\dots = 67 + 0,6767\dots$$

Հետևաբար՝ $100 a = 67 + a$, որտեղից էլ կստանանք, որ $a = \frac{67}{99} :$

Եթե թիվը $0,(452)$ է, ապա, կատարելով $a = 0,(452)$ նշանակումը, համանման ձևով կունենանք.

$$a = 0,452452452\dots$$

$$1000 a = 452,452452\dots$$

$$1000 a = 452 + a, \text{ հետևաբար՝ } a = \frac{452}{999} :$$

Հետևաբար պարզ պարբերական տասնորդական կոտորակը սովորական կոտորակ դարձնելիս պարբերությունը գրվում է համարիչում, իսկ հայտարարում՝ այնքան 9-ը, ինչքան թվանշան կա պարբերության մեջ:

Քննարկենք այն դեպքը, երբ ստորակետից հետո մինչև առաջին պարբերությունը կան այլ թվանշաններ:

$a = 0,2(73)$ դարձնենք սովորական կոտորակ:

$a = 0,2737373...$ հավասարությունը բազմապատկենք մի դեպքում 1000-ով, մյուս դեպքում՝ 10-ով, կստանանք.

$$1000a = 273,7373...$$

$$10a = 2,7373...$$

Առաջին հավասարությունից հանենք երկրորդը, կստանանք.

$$1000a - 10a = 273 - 2, \text{ հետևաբար.}$$

$$a = \frac{273-2}{990} = \frac{271}{990}:$$

Ձևակերպենք վերջնական կանոնը:

Անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը սովորական կոտորակ դարձնելիս ամբողջ մասը գրում են ամբողջ մասում, այնուհետև՝ ստորակետից հետո մինչև երկրորդ պարբերությունը գրված թվի և ստորակետց հետո մինչև առաջին պարբերությունը գրված թվի տարբերությունը գրում համարիչում, իսկ հայտարարում գրում այնքան 9-ը, ինչքան թվանշան կա ստորակետից հետո մինչև առաջին պարբերությունը:

$$\text{Օրինակ: } 3,53(148) = 3 \frac{53148-53}{99900} = 3 \frac{53095}{99900} = 3 \frac{287}{540}:$$

Նշված ձևափոխումը կարելի է կատարել նաև հետևյալ գործողությունների միջոցով.

$$3,46(71) = 3 + 0,46(71) = 3 + 46, (71): 100 = 3 + (46 + 0, (71)): 100 = 3 + \left(46 + \frac{71}{99}\right): 100 = 3 + \frac{4625}{99}: 100 = 3 \frac{4625}{9900} = 3 \frac{185}{396}$$

Բարձր դասարաններում կծանոթանաք պարբերական տասնորդական կոտորակը սովորական կոտորակ դարձնելու այլ եղանակի:

Վարժություններ

1. Թիվը ներկայացրե՛ք անկրճատելի սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) $\frac{48}{900}$

բ) $\frac{635}{9990}$

գ) $\frac{777}{999}$

դ) $\frac{1212}{9999}$

ե) $\frac{74074}{999999}$

2. Տասնորդական կոտորակը ներկայացրե՛ք անկրճատելի սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) 0,28

բ) 1,94

գ) 0,425

դ) 0,032

ե) 1,0625

3. Կոտորակը ներկայացրե՛ք տասնորդական կոտորակի տեսքով.

ա) $\frac{27}{10}$

բ) $\frac{43}{100}$

գ) $\frac{67}{1000}$

դ) $\frac{730}{10000}$

4. Թիվը ներկայացրե՛ք տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ նախապես հայտարարը բերելով կարգային միավորի.

ա) $\frac{2}{5}$

բ) $\frac{3}{4}$

գ) $\frac{15}{8}$

դ) $\frac{57}{48}$

ե) $\frac{513}{475}$

զ) $\frac{61}{625}$

5. Կոտորակներից որո՞նք կարելի է ներկայացնել վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով.

ա) $\frac{5}{6}$

բ) $\frac{7}{16}$

գ) $\frac{11}{13}$

դ) $\frac{7}{20}$

ե) $\frac{15}{24}$

զ) $\frac{42}{45}$

է) $\frac{23}{75}$

ը) $\frac{84}{105}$

6. Կոտորակը ներկայացրե՛ք տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ անկյունային բաժանման միջոցով.

ա) $\frac{3}{4}$

բ) $\frac{8}{5}$

գ) $\frac{27}{40}$

դ) $\frac{7}{16}$

ե) $\frac{21}{28}$

զ) $\frac{31}{25}$

է) $\frac{860}{400}$

ը) $\frac{33}{600}$

թ) $\frac{7}{125}$

ժ) $\frac{91}{325}$

7. Թիվը ներկայացրե՛ք պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով.

ա) $\frac{2}{3}$

բ) $\frac{5}{9}$

գ) $\frac{17}{90}$

դ) $\frac{43}{99}$

ե) $\frac{7}{11}$

զ) $\frac{23}{22}$

է) $\frac{11}{7}$

ը) $\frac{31}{13}$

թ) $\frac{48}{65}$

ժ) $\frac{65}{44}$

ժա) $\frac{25}{54}$

ժբ) $\frac{89}{185}$

ժգ) $\frac{131}{220}$

ժդ) $\frac{17}{404}$

8. Պարզ պարբերական տասնորդական կոտորակը ներկայացրե՛ք անկրճատելի սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) 0,(5)

բ) 0,(6)

գ) 0,(13)

դ) 5,(27)

է) 2,(185)

զ) 1,(2475)

9. Թիվը ներկայացրե՛ք անկրճատելի սովորական կոտորակի տեսքով.

$$\text{ա) } 0,6(27)$$

$$\text{բ) } 0,23(6)$$

$$\text{գ) } 1,2(567)$$

$$\text{դ) } 3,51(72)$$

$$\text{ե) } 2,04(378)$$

10. Հաշվի առնելով, որ $1=1,(0)=0,(9)$, և $\frac{5}{13} = 0,(384615)$, $\frac{8}{13}$ -ը ներկայացրե՛ք պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով:

11. Հավասարությունից n° ըն է ճիշտ, և n° ըը՝ սխալ.

$$\text{ա) } 0,(43)=0,(4343)$$

$$\text{բ) } 1,(57)=1,57(57)$$

$$\text{գ) } 2,(300)=2,(3)$$

$$\text{դ) } 7,(0)=7,0$$

$$\text{ե) } 0,(761)=0,7(617)$$

$$\text{զ) } 5,(99)=6$$

12. Համեմատե՛ք թվերը.

$$\text{ա) } 0,75 \quad \text{և} \quad 0,(75)$$

$$\text{բ) } 1,837 \quad \text{և} \quad 1,(83)$$

$$\text{գ) } 0,(27) \quad \text{և} \quad \frac{3}{11}$$

$$\text{դ) } 2,3 \quad \text{և} \quad 2\frac{1}{3}$$

$$\text{ե) } -1\frac{2}{3} \quad \text{և} \quad -1,(67)$$

$$\text{զ) } -\frac{1}{8} \quad \text{և} \quad -0,(125)$$

$$\text{է) } 0,5(45) \quad \text{և} \quad 0,(54)$$

$$\text{ը) } -0,(421) \quad \text{և} \quad -0,4(214)$$

13. Թվերը դասավորե՛ք աճման կարգով.

$$\text{ա) } 0,(3), \quad 0,5^2, \quad 0,3, \quad \frac{3}{11}$$

$$\text{բ) } 0,(50), \quad 0,7^2, \quad \frac{6}{11}, \quad 0,5$$

14. Թվերը դասավորե՛ք նվազման կարգով.

$$\text{ա) } 0,3^2, \quad 0,1, \quad 0,(10), \quad \frac{1}{11}$$

$$\text{բ) } 0,8, \quad 0,(81), \quad \frac{7}{9}, \quad 0,9^2$$

15. Թվերը դասավորե՛ք աճման կարգով.

$$\text{ա) } 0,372, \quad 0,3(72), \quad \frac{4}{11}, \quad 0,3723, \quad \frac{21}{55}$$

բ) 1,(75),	$1\frac{21}{25}$,	1,(75),	1,(7),	$(1,3)^2$
գ) -0,3,	-0,(25),	-0,6 ² ,	$\frac{1}{4}$,	-0,(251)
դ) -2,(1),	-2,01,	-2,11,	$-\frac{32}{15}$,	$-\frac{21}{11}$

16. Թվերը դասավորեն՝ p նվազման կարգով.

ա) 0,(16),	$\frac{1}{6}$,	0,4 ² ,	0,(165),	0,164
բ) $2\frac{5}{16}$,	1,5 ² ,	2,(3),	2,33,	2,(31)
գ) $-\frac{8}{9}$,	$-\frac{9}{11}$,	-0,9,	-0,9 ² ,	-0,(82)

17. Գտե՛ք թվերի միջև գտնվող որևէ երկու թիվ.

ա) 0,8(7)	և	0,(8)	բ) 0,(53)	և	0,5(34)
գ) 2,111	և	2,(1)	դ) 0,077	և	$\frac{1}{13}$

18. Գտե՛ք անվերջ տասնորդական կոտորակի ստորակետից հետո 100-րդ թվանշանը.

ա) 0,5(3)	բ) 0,(123)	գ) 7,24(513)	դ) 8,2(615384)
-----------	------------	--------------	----------------

19. Թվի տասնորդական գրության ստորակետից հետո առաջին 200 թվանշանների մեջ քանի՞ անգամ է հանդիպում 4 թվանշանը.

ա) 0,(143)	բ) 0,4(5413)	գ) 0,(741428)	դ) 0,(4514921)
------------	--------------	---------------	----------------

20. Ճի՞շտ է արդյոք հավասարությունը.

ա) $1-0,(9)=0$	բ) $2\frac{1}{3} + 1, (47) = 2, (47) + 1\frac{1}{3}$
գ) $8-0,(62)=7,(38)$	դ) $5,(7) - 3,1=2,(6)$
ե) $7-5,(276)=1,(723)$	զ) $8,(6)+5,(4)=14$

21. Ո՞ր անվերջ պարբերական կոտորակը կստացվի գործողության արդյունքում.

ա) $5,(7) - 2,(4)$

բ) $6,(4)+2,(1)$

գ) $7,(41)+2,(3)$

դ) $6,(8) - 3,(35)$

ե) $5,(73) - 2,(6)$

զ) $9,(8) - 2,(341)$

22. Ընտրելով հարմար եղանակ՝ գործողության արդյունքը ներկայացրե՛ք անվերջ պարբերական կոտորակի տեսքով.

ա) $\frac{1}{3} + 0, (5)$

բ) $1\frac{7}{9} - 0, (24)$

գ) $3 - 0,1(74)$

դ) $3\frac{5}{11} - 2, (35)$

ե) $\frac{16}{27} + 1, (241)$

23. Կատարե՛ք գումարումը և հանումը (արդյունքը գրե՛ք սովորական կոտորակի տեսքով).

ա) $8,(6)+1,(4)$

բ) $3,7(4) - 1,(6)$

գ) $2,(67)+1,(5)$

դ) $2,(463)+1,(536)$

24. Ճի՞շտ է արդյոք հավասարությունը.

ա) $0,(34) \cdot 2 = 0,(68)$

բ) $0,(48) : 3 = 0,(16)$

գ) $0,(54) \cdot 3 = 1,(62)$

դ) $0,(70) : 10 = 0,(07)$

ե) $0,(09) \cdot 11 = 1$

զ) $0,(61) \cdot 100 = 61,(61)$

25. Կատարե՛ք բազմապատկումը և բաժանումը (արդյունքը գրե՛ք սովորական կոտորակի տեսքով).

ա) $0,(594) \cdot 3,(36)$

բ) $2,(4) : 0,(814)$

գ) $0,(1485) \cdot 6,7(3)$

դ) $3,(36) : 0,1(86)$

26. Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.

ա) $3 \cdot 1,(78) - 0,(36)$

բ) $0,(21) + 4 \cdot 1,(69)$

գ) $5 \cdot 1,(432) - 1,(162)$

դ) $2 \cdot 2,(576) + 2,(846)$

27*. Գտե՛ք $0,9$ -ից փոքր ամենամեծ թիվը, որի տասնորդական գրությունը չի պարունակում 9 թվանշանը:

28*. Ո՞ր թիվը կստացվի, եթե $a = \frac{7}{9}$ թվի տասնորդական գրության մեջ ստորակետից հետո մեկ թվանշան ջնջենք:

29*. $a = \frac{24}{37}$ թվի տասնորդական գրության մեջ ստորակետը 3 թվանշան աջ են տեղափոխել և ստացել b թիվը:

ա) Քանի՞ անգամ է b -ն a -ից մեծ:

բ) Ինչքանո՞վ է b -ն a -ից մեծ:

30*. $a = \frac{7}{11}$ կոտորակի տասնորդական գրության մեջ ջնջել են 2015 -րդ թվանշանը, ստացել b թիվը, ջնջել են 2016 -րդ թվանշանը, ստացել c թիվը, ջնջել են 2015 -րդ և 2016 -րդ թվանշանները և ստացել d թիվը: a, b, c և d թվերը դասավորել աճման կարգով:

Թեմա 12. Դիրիխլեի սկզբունքը

Դիրիխլեի սկզբունքին ծանոթանալու նպատակով դիտարկենք հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր 1. Ապացուցել, որ ցանկացած 11 բնական թվերից կարելի է ընտրել 2 թիվ այնպես, որ դրանց տարբերությունը բաժանվի 10-ի:

Ապացուցում: Քանի որ թվանշաններն ընդամենը 10-ն են, հետևաբար՝ ցանկացած 11 բնական թվերից գոնե երկուսի վերջին թվանշանները կհամընկնեն: Այդպիսի երկու թվերի տարբերության վերջին թվանշանը կլինի 0, և հետևաբար՝ այդ տարբերությունը կբաժանվի 10-ի: Պնդումն ապացուցված է:

Նկատենք, որ եթե ունենայինք 10 կամ ավելի քիչ թվեր, ապա դրանք կարող են ավարտվել տարբեր թվանշաններով (օրինակ՝ հաջորդական թվերի դեպքում): Այդ դեպքում թվերից ցանկացած երկուսի տարբերության վերջին թվանշանը կլինի 0-ից տարբեր և չի բաժանվի 10-ի: Հետևաբար՝ խնդրի լուծմանը նպաստեց այն հանգամանքը, որ թվերի քանակը առնվազն 1-ով ավելի է, քան բոլոր թվանշանների քանակը: Հենց այս սկզբունքն էլ մաթեմատիկայում հայտնի է այսպես կոչված «Դիրիխլեյի սկզբունք» անունով:

Դիրիխլեի սկզբունքը. <Եթե n արկղում տեղադրված են $(n+1)$ -ից n չպակաս առարկաներ, ապա ինչ-որ արկղում կգտնվեն այդ առարկաներից առնվազն երկուսը>:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ n չպակաս արկղում չկա 2 կամ ավելի առարկա: Նշանակում է՝ յուրաքանչյուր արկղում կա կա՛մ 1 առարկա, կա՛մ n չպակաս առարկա: Բայց այդ դեպքում առարկաների ընդհանուր քանակը հավասար կլինի այն արկղերի քանակին, որոնց մեջ կա 1 առարկա, և հետևաբար՝ չի գերազանցի արկղերի

ընդհանուր քանակը՝ n -ը: Մյուս կողմից՝ առարկաների քանակը, ըստ պայմանի, պետք է լիներ $(n+1)$ -ից ոչ պակաս: Ստացված հակասությունն էլ հաստատում է Դիրիխլեի սկզբունքի ճշմարիտ լինելը:

Նշենք, որ խնդիր 1-ում «արկղերը» 10-ն են (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 թվանշաններն են), իսկ «առարկաները»՝ տրված 11 թվերը: Եթե «արկղերը» համարակալենք 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 նիշերով և 11 թվերից յուրաքանչյուրը գրենք իր վերջին նիշի համարով արկղի վրա, ապա արկղերից մեկի վրա գրված կլինի երկու թիվ, որոնց տարբերությունն էլ կբաժանվի 10-ի:

Ուշագրավ է Դիրիխլեի սկզբունքի հետևյալ ձևակերպումը. «Եթե n վանդակում տեղավորված են $(n+1)$ -ից ոչ պակաս ճագար, ապա վանդակներից մեկում կլինի առնվազն երկու ճագար»:

Դիտարկենք ևս մի խնդիր:

Խնդիր 2: Պարկի մեջ կան 6 տարբեր գույնի գնդիկներ, ընդ որում՝ ամեն գույնից 10 գնդիկ: Առանց պարկի մեջ նայելու՝ ամենաքիչը քանի՞ գնդիկ պետք է հանել պարկից, որ ունենանք նույն գույնի՝ ա) 2 գնդիկ, բ) 3 գնդիկ, գ) 4 գնդիկ:

Լուծում: ա) Եթե հանենք 6 գնդիկ, ապա կարող է այնպես պատահել, որ ամեն գույնից ունենանք մեկական գնդիկ: Նման դեպքերը մաթեմատիկայում ընդունված է բնութագրել «վատագույն դեպք» արտահայտությամբ (իհարկե, հնարավոր է հանել ընդամենը 2 գնդիկ, և երկուսն էլ լինեն նույն գույնի, բայց «վատագույն դեպք» բնորոշումը նշանակում է՝ կատարել հնարավորինս առավելագույն քայլեր՝ պայմանով, որ խնդրի պահանջը դեռ չկատարվի): Հետևաբար՝ 7-րդ գնդիկը հանելու դեպքում անպայման երկու գնդիկ կլինեն նույն գույնի, քանի որ գույներն ընդամենը 6-ն են:

բ) Համանման ձևով 12 գնդիկ հանելու դեպքում, վատագույն դեպքը՝ ամեն գույնից 2-ական գնդիկ հանելն է: Հետևաբար՝ 13-րդ գնդիկը հանելուց հետո կունենանք նույն գույնի 3 գնդիկ:

գ) Նույն ձևով 18 գնդիկ հանելու դեպքում, հնարավոր է, ունենանք ամեն գույնից 3-ական գնդիկ: Եվ միայն 19-րդ գնդիկը հանելուց հետո կարող ենք վստահ պնդել, որ կունենանք նույն գույնի առնվազն 4 գնդիկ:

Նկատենք, որ յուրաքանչյուր դեպքում պատասխանը բավարարում է հետևյալ օրինաչափությանը.

ա) $7=1\cdot6+1$ ($7>1\cdot6$) բ) $13=2\cdot6+1$ ($13>2\cdot6$) գ) $19=3\cdot6+1$ ($19>3\cdot6$):

Հաշվի առնելով խնդիր 2-ում ստացված արդյունքները՝ ներկայացնենք Դիրիխլեի սկզբունքի ավելի ընդհանուր ձևակերպում:

Թեորեմ 1. Եթե n արկղում տեղավորված են $k\cdot n$ -ից ավելի ($k\cdot n+1$ -ից ոչ պակաս) առարկա, ապա արկղերից որևէ մեկում կլինի առնվազն $k+1$ առարկա:

(Նկատենք, որ $k=1$ դեպքում սա համընկնում է պարզ ձևակերպման հետ):

Ապացուցում: Իրո՛ք, երբ բոլոր n արկղից յուրաքանչյուրում լինի k առարկա, առարկաների ընդհանուր քանակը կլինի $n\cdot k$: Իսկ եթե ինչ-որ արկղերում առարկաների քանակը լինի k -ից քիչ (այսինքն՝ ինչ-որ արկղերից առարկաներ են հանված), ապա առարկաների քանակը կլինի ավելի քիչ, քան $n\cdot k$ -ն: Բայց մենք ունենք $n\cdot k$ -ից ավելի առարկա, հետևաբար՝ հնարավոր չէ, որ բոլոր արկղերում լինեն k կամ k -ից քիչ առարկաներ: Թեորեմն ապացուցված է:

Նշենք, որ խնդիր 2-ում «արկղները» տարբեր գույներն են, այսինքն՝ 6 հատ են, իսկ «առարկաները» գնդիկներն են:

Դիրիխլեի սկզբունքով խնդիրները լուծելիս պետք է կարողանալ ճիշտ ընտրել, թե որո՞նք են այնտեղ համարվում «արկղեր», և որոնք են «առարկաները»:

Խնդիր 3: Դասարանում սովորում է 25 աշակերտ: Ապացուցել, որ առնվազն երեք աշակերտի ծննդյան ամիսները համընկնում են:

Լուծում: Այս խնդրում «արկղերը» տարվա 12 ամիսներն են ($n=12$), իսկ «առարկաները» դասարանի աշակերտներն են: Նկատենք, որ աշակերտների քանակը՝ $25 > 2 \cdot 12$ ($k=2$), հետևաբար՝ դասարանում կլինի 3 ($k+1=3$) աշակերտ, ովքեր ծնվել են նույն ամսին:

Մաթեմատիկայի տարբեր բաժինների մի շարք խնդիրներ լուծվում են Դիրիխլեի սկզբունքով: Նշենք, որ խնդրի տեքստից երբեմն հեշտ չէ կոահել, որ խնդիրը կլուծվի այդ սկզբունքի կիրառմամբ:

Խնդիր 4: Ապացուցել, որ գոյություն ունի միայն 1 թվանշաններով կազմված թիվ, որը բաժանվում է 17-ի:

Լուծում: Դիտարկենք 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11 \dots 1}_{17}$ թվերը: Ցույց տանք, որ այդ թվերից առնվազն մեկը բաժանվում է 17-ի:

Կատարենք հակառակ ենթադրությունը: Ենթադրենք այդ թվերից ոչ մեկը առանց մնացորդի չի բաժանվում 17-ի, ապա մնացորդում կստացվեն 1, 2, 3, ..., 16 թվերից որևէ մեկը: Դրանց քանակը 16 է, իսկ թվերը 17-ն են (այս խնդրում «արկղները» 16 մնացորդներն են, իսկ «առարկաները»՝ 17 թվերը):

Ըստ Դիրիխլեի սկզբունքի՝ կգտնվեն առնվազն երկու թիվ, որոնք 17-ի բաժանելիս մնացորդներում կստացվեն հավասար թվեր: Հետևաբար՝ դրանց տարբերությունը, որն ունի հետևյալ

տեսքը՝ $\underbrace{11 \dots 1}_m \underbrace{00 \dots 0}_k = \underbrace{11 \dots 1}_m \cdot 10^k$, որտեղ $m + k \leq 17$, պետք է բաժանվի 17-ի: Քանի որ 17-ը պարզ թիվ է, ուստի կիրառենք թվերի բաժանելիության հատկությունը, կստանանք, որ $\underbrace{11 \dots 1}_m$ և 10^k թվերից որևէ մեկը պետք է բաժանվի 17-ի: Բայց, քանի որ 10^k -ն ոչ մի k -ի դեպքում չի բաժանվում 17-ի (ինչո՞ւ), հետևաբար՝ $\underbrace{11 \dots 1}_m$ թիվը կբաժանվի 17-ի. այն, ինչը պետք էր ապացուցել:

Նկատենք, որ Դիրիխլեի սկզբունքի և դրա վերաբերյալ վերը ներկայացված խնդիրների, պնդումների իրավացիությանը նպաստում էր այն հանգամանքը, որ դրանցում «առարկաների» քանակն *ավելի է* որոշակի թվերից (ո-ից կամ k -ո-ից, որտեղ o -ն «արկղերի» քանակն է): Ներկայացնենք համանման մի պնդում, որն ունի դրական պատասխան, եթե առարկաների քանակը *պակաս է* որոշակի թվից:

Այդ նպատակով դիտարկենք խնդիրը:

Խնդիր 5: Համայնքն իր տարածքի 7 դպրոցին բաժանեց 20 համակարգիչ: Ապացուցել, որ համայնքն ինչպես էլ կատարի համակարգիչների բաշխումը, կլինեն առնվազն երկու դպրոց, որոնք կստանան հավասար քանակով (հնարավոր է՝ ոչ մի հատ) համակարգիչներ:

Լուծում: Ենթադրենք՝ ոչ մի երկու դպրոց չեն ստացել հավասար թվով համակարգիչներ: Դասավորենք դպրոցներն ըստ ստացած համակարգիչների քանակի աճման կարգով: Հաշվենք համակարգիչների նվազագույն քանակը՝ պայմանով, որ ոչ մի երկու դպրոց չեն ստացել հավասար թվով համակարգիչներ: Պարզ է, որ նվազագույն քանակը հաշվելու համար պետք է համարենք, որ առաջին դպրոցը ոչ մի համակարգիչ չի ստացել:

Քանի որ երկրորդ դպրոցն ստացել է առաջինից ավելի՝ նվազագույնը կլինի 1, երրորդը՝ երկրորդից ավելի՝ նվազագույնը 2, չորրորդը՝ երրորդից ավելի՝ նվազագույնը 3, և այդպես շարունակ: Բայց այդ դեպքում համակարգիչների ընդհանուր քանակը կլինի ոչ պակաս, քան $0+1+2+3+4+5+6=21$: Մակայն բաժանվել է 20 համակարգիչ, հետևաբար՝ առնվազն երկու դպրոց ստացել են հավասար թվով համակարգիչներ, ինչն էլ ապացուցում է խնդրի պնդումը:

Եթե դպրոցներ համարենք «արկղեր», իսկ համակարգիչները՝ «առարկաներ», ապա, համանման վերը նշված խնդրի լուծմանը՝ կապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: Եթե n արկղում տեղադրված են $0+1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)$ գումարից պակաս առարկաներ, ապա առնվազն երկու արկղում կլինեն հավասար թվով առարկաներ:

Ցույց տանք, որ $0+1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)$ գումարը կարելի է հաշվել հարմար եղանակով՝ դա հավասար է $\frac{n(n-1)}{2}$:

Այդ գումարը նշանակենք S -ով և գրենք երկու անգամ. մի դեպքում գումարելիները դասավորենք աճման կարգով, իսկ մյուս դեպքում՝ նվազման կարգով.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1)$$

$$S = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 3 + 2 + 1:$$

Նկատենք, որ միմյանց տակ գրված գումարելիներից յուրաքանչյուր զույգի գումարը հավասար է n -ի ($1+(n-1)=n$, $2+(n-2)=n$ և այլն): Այդպիսի զույգերի թիվը հավասար է $(n-1)$ -ի: Ուստի, անդամ առ անդամ գումարելով վերը նշված հավասարությունը՝ կստանանք.

$$2S = n(n-1): \text{ Հետևաբար. } S = \frac{n(n-1)}{2}:$$

Խնդիրներ

1. Դպրոցում սովորում է 370 աշակերտ: Ապացուցե՛ք, որ դպրոցի առնվազն երկու աշակերտ իրենց ծննդյան օրը նշում են նույն օրը:
2. Ավագ դպրոցը, որտեղ սովորում են 19 գերագանցիկ աշակերտներ, ունի 10 դասարան: Դասարաններից մեկում գերագանցիկ աշակերտ չկա: Ապացուցե՛ք, որ դասարաններից մեկում կա առնվազն երեք գերագանցիկ աշակերտ:
3. Քաղաքն ունի 30000 բնակիչ: Այդ բնակիչների 2,5%-ի տարիքը մեծ է 80-ից: Ապացուցե՛ք, որ քաղաքի առնվազն երկու բնակիչ ծնվել են նույն օրը:
4. Այգում աճում են 4 տեսակի ծառեր: Այդ ծառատեսակներից ընդամենը 45 ծառ կա: Ապացուցե՛ք, որ այգում կա նույն տեսակի առնվազն 12 ծառ:
5. Մետաղադրամների հավաքածուն բաղկացած է 10, 20, 50, 100, 200 և 500 դրամ արժողությամբ 25 մետաղադրամից: Կա՞ն արդյոք դրանց մեջ նույն արժողությամբ 5 մետաղադրամ:
6. Պարկում կան 10 սպիտակ, 9 կապույտ, 8 կարմիր և 4 դեղին գնդիկներ: Առանց պարկի մեջ նայելու՝ ամենաքիչը քանի՞ գնդիկ պետք է հանել պարկից, որ դրանց մեջ լինեն.
 - ա) նույն գույնի 4 գնդիկ,
 - բ) նույն գույնի 8 գնդիկ,
 - գ) մեկ կարմիր և մեկ սպիտակ գնդիկ,
 - դ) երեք տարբեր գույնի գնդիկ:
7. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած երեք բնական թվերից կարելի է ընտրել երկուսն այնպես, որ դրանց գումարը լինի գույգ թիվ:
8. Տրված են կամայական 5 բնական թվեր: Ապացուցե՛ք, որ այդ թվերից կարելի է ընտրել երեք թիվ այնպես, որ դրանց գումարը բաժանվի 3-ի: Կարելի՞ է արդյոք միշտ ընտրել երկու թիվ, որ նրանց գումարը բաժանվի 3-ի:

9. 7 տուփում դասավորել են 50 խնձոր: Ապացուցե՛ք, որ տուփերից գոնե մեկում կլինի առնվազն 8 խնձոր:
10. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած ութ բնական թվերից կարելի է ընտրել երկու թիվ այնպես, որ դրանց տարբերությունը բաժանվի 7-ի:
11. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած 12 երկնիշ թվերից կարելի է ընտրել երկու թիվ այնպես, որ դրանց տարբերությունը լինի նույն թվանշաններից կազմված երկնիշ թիվ:
12. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած 10 եռանիշ թվերից կարելի է ընտրել երկու թիվ այնպես, որ դրանց տարբերության թվանշանների գումարը հավասար լինի 9-ի կամ 18-ի:
13. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած վեց բնական կենտ թվերից կարելի է ընտրել երկուսն այնպես, որ դրանց տարբերությունը բաժանվի 10-ի:
14. Ապացուցե՛ք, որ 3-ի բազմապատիկ ցանկացած 8 բնական թվերից կարելի է ընտրել երկուսն այնպես, որ դրանց տարբերությունը բաժանվի 21-ի:
15. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունի միայն 1-ով կազմված թիվ, որը բաժանվում է 19-ի:
16. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունի 131313 . . . 13 տեսքի թիվ, որը բաժանվում է 23-ի:
17. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած $p > 5$ պարզ թվի դեպքում գոյություն ունի միայն 1-ով կազմված թիվ, որը բաժանվում է p -ի:
18. 8 ձկնորս միասին բռնել են 27 ձուկ: Ապացուցե՛ք, որ.
 - ա) ձկնորսներից գոնե մեկը բռնել է 4-ից ոչ պակաս ձուկ,
 - բ) ձկնորսներից գոնե մեկը բռնել է 4-ից քիչ ձուկ,
 - գ) առնվազն երկու ձկնորս բռնել են հավասար թվով ձկներ:

19. Թելադրություն գրելիս Հայկը թույլ է տվել բոլորից շատ՝ 10 սխալ: Ապացուցե՛ք, որ սխալներ թույլ տված 20 աշակերտի մեջ կգտնվեն երեքը, ովքեր թույլ են տվել հավասար թվով սխալներ:
20. Կարելի՞ է արդյոք 8×8 քառակուսային աղյուսակի վանդակներում գրել 1, 0, -1 թվերն այնպես, որ յուրաքանչյուր տողի, յուրաքանչյուր սյան և երկու անկյունագծի վրա գրված թվերի գումարները լինեն տարբեր:
21. Հարթության մեջ տարված 13 ուղղից յուրաքանչյուրը հատում է մնացած բոլոր ուղիղները: Ապացուցե՛ք, որ դրանցից որևէ երկուսով կազմված անկյունը փոքր է 14° -ից:
22. Չորս միավոր կողմով քառակուսու ներքին տիրույթում նշված է 15 կետ: Ապացուցե՛ք, որ այդ քառակուսուց կարելի է կտրել միավոր կողմով քառակուսի, որի ներքին տիրույթում նշված կետերից չկան:
23. Հինգ միավոր կողմով քառակուսու ներքին տիրույթում նշված է 51 կետ: Ապացուցե՛ք, որ այդ կետերից կարելի է ընտրել երեք կետ, որոնք գտնվում են նույն միավոր կողմով քառակուսում:
24. Շրջանագիծը բաժանված է 9 հավասար աղեղների, որոնցից 5-ը ներկված են կարմիր, իսկ մյուս 4-ը՝ կապույտ գույնով: Ապացուցե՛ք, որ կարելի է տանել շրջանագծի այնպիսի տրամագիծ, որի ծայրակետերը կարմիր են:
25. Ապացուցե՛ք, որ մարդկանց 10 հոգանոց խմբում կգտնվեն երկուսը, ովքեր ունեն հավասար թվով ծանոթներ:
26. Ֆուտբոլի առաջնությանը մասնակցում է 14 թիմ: Ցանկացած երկու թիմ պետք է հանդիպեն ճիշտ մեկ անգամ: Ապացուցե՛ք, որ մրցության ցանկացած պահի կգտնվեն երկու թիմ, որոնք անց են կացրել հավասար թվով հանդիպումներ:

27. Հարթության վրա տրված 8 կետից որոշները միացված են հատվածներով: Ապացուցե՛ք, որ կլինեն երկու կետեր, որոնք միացված են հավասար թվով կետերի:
- 28*. Ապացուցե՛ք, որ 50 գունավոր խորանարդիկներից կարելի է ընտրել կա՛մ 8 տարբեր գույնի խորանարդիկ, կա՛մ 8 նույն գույնի խորանարդիկ:
- 29*. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած 100 թվերից կարելի է ընտրել.
 ա) երկու թիվ, որոնց տարբերությունը բաժանվում է 99-ի,
 բ) 99-ի բաժանվող մեկ թիվ կամ մի քանի թիվ, որոնց գումարը բաժանվում է 99-ի:
- 30*. Ապացուցե՛ք, որ 10 թվերից կարելի է ընտրել երկու թիվ այնպես, որոնց կա՛մ գումարը, կա՛մ տարբերությունը բաժանվում է 17-ի:
- 31*. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած 52 թվերից կարելի է ընտրել երկու թիվ այնպես, որոնց կա՛մ գումարը, կա՛մ տարբերությունը բաժանվում է 100-ի: Ճի՞շտ է արդյոք խնդիրը 51 թվերի դեպքում:
- 32*. Ապացուցե՛ք, որ 16-ից փոքր բնական թվերից ինչպես էլ ընտրենք 6 թիվ, դրանց մեջ կլինի առնվազն երկու թիվ, որոնց տարբերությունը հավասար է 1-ի կամ 2-ի:
- 33*. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունի այնպիսի n բնական թիվ, որ $(3^n - 1)$ -ը բաժանվում է 125-ի:
- 34*. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունեն 4-ի այնպիսի երկու տարբեր աստիճաններ, որոնց վերջին երեք թվանշանը նույնն են:
- 35*. Ապացուցե՛ք, որ եթե 100-ը չգերազանցող բնական թվերից ինչպես էլ ընտրենք 51 թիվ, ապա դրանց մեջ կլինի մեկը մյուսին բաժանվող երկու թիվ: Ճի՞շտ է արդյոք այդ պնդումը 50 թվերի ընտրության դեպքում:

**Թեմա 13. Բաժանարար և բազմապատիկ:
Էվկլիդեսի ալգորիթմը (քայլաշարը):**

Երկու կամ մի քանի թվի ընդհանուր բաժանարարների մեջ ամենամեծ թիվն անվանում են այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար: Այսպես՝ 45 թվի բաժանարարներն են 1, 3, 5, 9, 15, 45, իսկ 30 թվի՝ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30: Դրանց ընդհանուր բաժանարարներն են՝ 1, 3, 5, 15: Հետևաբար՝ այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է 15-ը, և գրվում է՝ $(30, 45) = 15$:

Եթե երկու թվի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 1-ի, ապա այդ թվերն անվանում են փոխադարձաբար պարզ: Օրինակ՝ 8 և 15 թվերը փոխադարձաբար պարզ են:

Երկու կամ մի քանի թվի ընդհանուր բազմապատիկ անվանում են այն ամենափոքր թիվը, որը բաժանվում է տրված թվերից յուրաքանչյուրին: Այսպես՝ 12 և 18 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը 36-ն է, կգրենք հետևյալ ձևով՝ $[12, 18] = 36$:

Թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը և ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար թվերը վերլուծում են պարզ արտադրիչների.

84		2	90		2	126		2
42		2	45		3	63		3
21		3	15		3	21		3
7		7	5		5	7		7
1			1			1		

Հետևաբար՝ $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$:

Ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու համար հաշվում են բոլոր արտադրիչների արտադրյալը՝ յուրաքանչյուրը վերցնելով առավելագույն ցուցիչով. $[84, 90, 126] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$:

Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար հաշվում են ընդհանուր պարզ արտադրիչների արտադրյալը՝ յուրաքանչյուրը վերցնելով նվազագույն ցուցիչով. $(84, 90, 126) = 2 \cdot 3 = 6$:

Երբեմն հարմար է նրկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնել Էվկլիդեսի անունով հայտնի մեթոդով:

Օրինակ՝ գտնենք 1147 և 1517 թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը.

ա) մեծ թիվը բաժանենք փոքրին.

$$\begin{array}{r|l} 1517 & 1147 \\ - 1147 & 1 \\ \hline 370 & \text{—մնացորդ} \end{array}$$

բ) նախորդ արդյունքի բաժանարարը բաժանենք մնացորդին.

$$\begin{array}{r|l} 1147 & 370 \\ - 1110 & 3 \\ \hline 37 & \text{—մնացորդ} \end{array}$$

Այս քայլը կրկնում ենք այնքան, մինչև բաժանումն ավարտվի առանց մնացորդի: Վերջին բաժանարարը կլինի այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

$$\begin{array}{r|l} 370 & 37 \\ - 370 & 10 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{Հետևաբար՝ } (1147, 1517) = 37 :$$

Ընդհանուր դեպքում այդ եղանակը նկարագրենք հետևյալ կերպ:

Տրված են երկու բնական թվեր՝ a, b , ընդ որում՝ $a > b$: a -ն b -ի մնացորդով բաժանելով՝ կստանանք. $a = q_1 b + r_1$:

Թվերի բաժանելիության հատկություններից ելնելով՝ նկատենք, որ եթե a -ն և b -ն բաժանվում են d թվին, ապա r_1 -ը նույնպես բաժանվում է d -ի, և եթե r_1 -ը և b -ն բաժանվում են d թվին, ապա a -ն նույնպես բաժանվում է d -ի:

Հետևաբար՝ $(a, b) = (b, r_1)$:

Այժմ, b -ն r_1 -ի մնացորդով բաժանելով, կստանանք՝ $b = q_2 r_1 + r_2$:

Այնուհետև, r_1 -ը r_2 -ի վրա մնացորդով բաժանելով, կստանանք՝ $r_1 = q_3 r_2 + r_3$, և այլն:

Որպես արդյունք՝ կստանանք բնական թվերի $a > b > r_1 > r_2 > r_3 \dots$ նվազող հաջորդականություն: Բայց a -ից փոքր բնական թվերը կան միայն վերջավոր թվով: Այդ պատճառով այս հաջորդականությունը որևէ քայլում կընդհատվի, այսինքն՝ որևէ r_{k-1} կբաժանվի r_k -ի: Հետևաբար՝ r_k -ն կլինի r_{k-1} և r_k թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

Վերը նշված $(a, b) = (b, r_1)$ հավասարության շնորհիվ՝ կունենանք.

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) = \dots = (r_{k-1}, r_k) = r_k$$

Հետևաբար՝ վերջին զրոյից տարբեր մնացորդն էլ հենց կլինի a և b թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

Թեորեմ 1. Դիցուք՝ $a = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n}$ -ը a թվի կանոնական վերլուծությունն է, իսկ b -ն՝ a -ի որևէ բաժանարար: Այդ դեպքում $b = P_1^{k_1} \cdot P_2^{k_2} \cdot \dots \cdot P_n^{k_n}$, որտեղ $0 \leq k_1 \leq \alpha_1, 0 \leq k_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq k_n \leq \alpha_n$:

Ապացույց: Դիցուք՝ $a = b \cdot c$: Եթե b և c թվերը ներկայացնենք կանոնական տեսքով և բազմապատկենք իրար, կստանանք $b \cdot c = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n}$: Հետևաբար՝ b -ն չի կարող ունենալ

$P_1, P_2, \dots, P_n$ թվերից տարբեր այլ պարզ բաժանարար, իսկ կանոնական վերլուծության մեջ $P_1, P_2, \dots, P_n$ թվերի ցուցիչները չեն կարող գերազանցել համապատասխանաբար $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ թվերը: Նշենք նաև, որ նշված տեսքի ցանկացած b թիվ կլինի a -ի բաժանարար:

$$\begin{aligned} \text{Իրո՛ք՝ } a &= P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n} = \\ &= (P_1^{k_1} \cdot P_2^{k_2} \cdot \dots \cdot P_n^{k_n}) \cdot P_1^{\alpha_1 - k_1} \cdot P_2^{\alpha_2 - k_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n - k_n} = b \cdot c: \end{aligned}$$

Այժմ դիտարկենք թվի բաժանարարների քանակը գտնելու խնդիրը:

Եթե $a = P_1^{\alpha_1}$, ապա a թվի բաժանարարները կլինեն $1, P_1^1, P_1^2, \dots, P_1^{\alpha_1}$ թվերը, որոնց քանակը հավասար է $(\alpha_1 + 1)$:

Եթե $a = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2}$, ապա, ըստ վերը ապացուցվածի՝ a -ի բաժանարարները կլինեն $b = P_1^{k_1} \cdot P_2^{k_2}$ թվերը, որտեղ $0 \leq k_1 \leq \alpha_1$, $0 \leq k_2 \leq \alpha_2$: Դրանց քանակը հավասար կլինի (k_1, k_2) զույգերի քանակին, որտեղ $k_1 = 0, 1, 2, \dots, \alpha_1$, և $k_2 = 0, 1, 2, \dots, \alpha_2$:

Այլ կերպ ասած՝ դրանց քանակը հավասար կլինի մի աղյուսակի վանդակների քանակին, որը ունի $(\alpha_1 + 1)$ տող և $(\alpha_2 + 1)$ սյուն, այսինքն՝ $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$:

Համանման ձևով, եթե թիվն ունի երեք և ավելի պարզ բաժանարար, ապա իր բաժանարարների քանակը գտնելու համար պետք է այդ թվի կանոնական վերլուծության պարզ արտադրիչների աստիճացուցիչներին գումարել մեկ և ստացվածները բազմապատկել:

Այսինքն՝ եթե $a = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n}$ թվի բաժանարարների քանակը նշանակենք $r(a)$, ապա $r(a) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_n + 1)$:

Օրինակ՝ քանի որ $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, հետևաբար՝ այդ թվի բաժանարարների քանակը հավասար է՝

$$r(720)=(4+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1)=30:$$

a -ից փոքր և a -ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակը նշանակում են $\varphi(a)$ -ով:

Պարզ է, որ, եթե P -ն պարզ թիվ է, ապա $\varphi(P) = P - 1$: Հեշտ է նկատել, որ $\varphi(P^2) = P^2 - P$: Իրոք, եթե $1, 2, 3, \dots, P^2$ թվերից դեն նետենք $1 \cdot P, 2 \cdot P, 3 \cdot P, \dots, (P-1) \cdot P, P \cdot P$ թվերը, ապա մնացած թվերը և P^2 կլինեն փոխադարձաբար պարզ:

Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ $\varphi(P^k) = P^k - P^{k-1}$:

Առանց ապացուցման ներկայացնենք հետևյալ պնդումները.

ա) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

բ) $\varphi(a) = a \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right):$

Վարժություններ

1. Գտն՞ք թվի բոլոր պարզ բաժանարարները.

ա) 12, բ) 15, գ) 42, դ) 43:

2. Գտն՞ք.

ա) 18-ի բոլոր բազմապատիկները, որոնք փոքր են 100-ից,

բ) 11-ի բոլոր երկնիշ բազմապատիկները:

3. Թվերը վերլուծե՞ք պարզ արտադրիչների.

ա) 72, բ) 156, գ) 1176, դ) 5800:

4. Գտն՞ք թվի բոլոր բաժանարարները.

ա) 77 բ) 98 գ) 3^7 դ) $2 \cdot 3^7$

5. Գոյություն ունի՞ արդյոք բնական թիվ, որի թվանշանների արտադրյալը լինի.

ա) 2000, բ) 2808 :

6. Գտն՞ք.

ա) ամենամեծ վեցանիշ թիվը, որի թվանշանների արտադրյալը հավասար է 4320,

բ) ամենափոքր հնգանիշ թիվը, որի թվանշանների արտադրյալը հավասար է 1512:

7. Գտնի՞ք թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը.

ա) 72, 96

բ) 81, 98

գ) 154, 231, 308

դ) 168, 180, 204

8. Դասարանի աշակերտներին հավասարապես բաժանեցին 161 տետր և 230 գիրք: Քանի՞ աշակերտ կա դասարանում:

9. Գտնի՞ք թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.

ա) 32, 35

բ) 54, 126

գ) 18, 63, 99

դ) 56, 70, 119

10. Շրջանաձև վագրուդու մեկնարկային կետից միաժամանակ միևնույն ուղղությամբ դուրս եկան երկու հեծանվորդ: Քանի՞ րոպեից նրանք նորից կհանդիպեն մեկնարկային կետում, եթե նրանցից մեկը մի լրիվ պտույտը կատարում է 8 րոպեում, իսկ մյուսը՝ 10 րոպեում:

11. Թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնի՞ք հարմար եղանակով.

ա) $2 \cdot 35$ և $3 \cdot 35$ բ) $2 \cdot 7 \cdot 57$ և $3 \cdot 5 \cdot 57$ գ) $6 \cdot 21 \cdot 20$ և $8 \cdot 21 \cdot 20$

12. Թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնի՞ք հարմար եղանակով.

ա) 29 և 1363

բ) 46 և 2011

գ) 84 և 3409:

13. Գրե՞ք այն թվերի բանաձևը, որոնք բազմապատիկ են՝

ա) 3-ին,

բ) 2-ին և 3-ին,

գ) 4-ին և 6-ին:

14. Քանի՞ բնական թիվ կա 200-ից փոքր, որոնք բաժանվում են.

ա) 3-ի,

բ) 3-ի և 5-ի,

գ) 6-ի և 8-ի:

15. Գտնի՞ք 15 և 35 թվերի այն բոլոր ընդհանուր բազմապատիկները, որոնք փոքր են 500-ից:

16. Գտնի՞ք 3, 4 և 5 թվերի բազմապատիկ ամենափոքր եռանիշ թիվը:

17. Օգտվելով Էվկլիդեսի ալգորիթմից՝ գտնի՞ք թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը.

ա) 437, 943

բ) 3567, 4387

գ) 2491, 4559

դ) 6943, 7729

18. Օգտվելով Էվկլիդեսի ալգորիթմից՝ ցոյց տվե՞ք, որ թվերը փոխադարձաբար պարզ են.

ա) 481, 957

բ) 2453, 5293

գ) 3959, 7739

դ) 6371, 8903

19. Երկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 18-ի: Կարո՞ղ է արդյոք այդ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար լինի 240-ի:

20. Գտնե՛ք m և n բնական թվերի բոլոր հնարավոր արժեքները, եթե՝

$$\text{ա) } (m,n)=5 \quad [m,n]=10 \quad \text{բ) } (n,m)=1 \quad [n,m]=21$$

$$\text{գ) } (n,m)=12 \quad [n,m]=54 \quad \text{դ) } (n,m)=4 \quad [n,m]=56$$

21. Ապացուցե՛ք, որ $\frac{n}{(n,m)}$ և $\frac{m}{(n,m)}$ թվերը փոխադարձաբար պարզ են, որտեղ n և m -ը բնական թվեր են:

22. Երկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 6-ի: Գտնե՛ք այդ թվերը, եթե դրանց գումարը հավասար է. ա) 36, բ) 72:

23. Երկու թվերի տարբերությունը հավասար է 38: Կարո՞ղ է արդյոք դրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը լինի 4:

24. Ապացուցե՛ք, որ տրված թվերը փոխադարձաբար պարզ են:

$$\text{ա) } 2^{30}-3 \text{ և } 2^{30}+5 \quad \text{բ) } 3^{20}-4 \text{ և } 3^{20}+4$$

25. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած $n > m$ բնական թվերի դեպքում $(n,m)=(n-m,m)$:

Կիրառելով այդ հատկությունը՝ գտնե՛ք.

$$\text{ա) } (252, 406) \quad \text{բ) } (442, 715) :$$

26. Գտնե՛ք երկու հաջորդական զույգ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

27. Ապացուցե՛ք, որ փոխադարձաբար պարզ են՝

ա) երկու հաջորդական կենտ թվեր,

բ) կենտ թիվը և դրա հարևան զույգ թիվը:

28. Ապացուցե՛ք, որ $(n,m) \cdot [n,m]=n \cdot m$:

29. Գտնե՛ք թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.

$$\text{ա) } 588 \text{ և } 1960, \quad \text{բ) } 1938 \text{ և } 2312:$$

30. Դիցուք՝ n -ը m -ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է k ($k>0$): Ապացուցե՛ք, որ $(n,m)=(m,k)$:

31. Կիրառելով Էվկլիդեսի ալգորիթմը՝ գտնե՛ք.

$$\text{ա) } (161, 253) \quad \text{բ) } (642, 1391)$$

$$\text{գ) } (1247, 1591) \quad \text{դ) } (6943, 7729)$$

32. Գտե՛ք կոտորակի համարիչի և հայտարարի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և կոտորակը կրճատե՛ք.

ա) $\frac{253}{341}$ բ) $\frac{221}{299}$ գ) $\frac{516}{1505}$ դ) $\frac{4112}{8481}$

33. Ապացուցե՛ք, որ թվերը փոխադարձաբար պարզ են.

ա) 341, 408 բ) 1377, 2597 գ) 2816, 3885 դ) 5263, 8901

34*. Գտե՛ք m -ի ամենափոքր բնական արժեքը, որի դեպքում կոտորակը կլինի կրճատելի.

ա) $\frac{2m+13}{m+1}$ բ) $\frac{5m+18}{2m+1}$

35*. Գտե՛ք n -ի այն բոլոր բնական արժեքները, որոնց դեպքում կոտորակի արժեքը բնական թիվ է.

ա) $\frac{9n+37}{3n-1}$ բ) $\frac{4n+51}{2n+3}$

36*. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում $(3n+1, 7n+2)=1$:

37*. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած m բնական թվի դեպքում $\frac{6m+1}{10m+2}$ կոտորակն անկրճատելի է :

38*. Գտե՛ք թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը.

ա) $2^{17} + 2^{14}$ և $3^{17} + 3^{14}$ բ) $5^{19} + 2 \cdot 5^{17}$ և $3^{21} - 2 \cdot 3^{18}$:

39*. Գտե՛ք թվերի ընդհանուր բաժանարարի քանակը.

ա) 12^5 և 18^7 բ) 45^8 և 75^6 :

40*. Գտե՛ք. ա) $(2^{20} - 1, 2^{30} - 1)$, բ) $(\underbrace{11 \dots 1}_{20}, \underbrace{11 \dots 1}_{30})$:

Թեմա 14. Դիոֆանտյան հավասարումներ

Խնդիրներ լուծելիս երբեմն անհրաժեշտ է լինում գտնել երկու կամ ավելի փոփոխականով հավասարման այն լուծումները, որոնք ամբողջ (կամ բնական) թվեր են:

Դիցուք՝ տրված է երկու փոփոխականով հավասարում՝ $5x - 7y = 1$, կամ $xy - 5x + 2y = 13$: Եթե պահանջվում է գտնել x_0 և y_0 ամբողջ (կամ բնական) թվերն այնպես, որ (x_0, y_0) թվագույգը լինի տրված հավասարման լուծում, այսինքն՝ $5x_0 - 7y_0 = 1$, ապա այդպիսի հավասարումն անվանում են Դիոֆանտյան հավասարում: Այդ անվանումը տրվել է ի պատիվ III դարի հույն մաթեմատիկոս Դիոֆանտի:

Դիտարկենք Դիոֆանտյան հավասարումներ և դրանց լուծման եղանակներ:

1. Դիոֆանտյան գծային հավասարում անվանում են այն հավասարումը, որն ունի $ax + by = c$ տեսքը, որտեղ a -ն, b -ն և c -ն թվեր են, ընդ որում՝ a -ն և b -ն 0-ից տարբեր են:

Օրինակ. $5x - 7y = 1$ հավասարումը գծային դիոֆանտյան հավասարում է, եթե պահանջվում է գտնել այդ հավասարման ամբողջ լուծումները:

Հավասարման լուծումներից մեկը $x = 3$ և $y = 2$ թվերի գույգն է, քանի որ՝ $5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$: Նման հավասարման ցանկացած լուծում անվանում են մասնակի լուծում: Մենք ցույց կտանք, որ այդ հավասարումն ունի շատ լուծումներ, որոնք ներկայացվում են $x = 3 + 7n$ և $y = 2 + 5n$ տեսքով, որտեղ n -ը ցանկացած ամբողջ թիվ է ($n \in \mathbb{Z}$) : Այսինքն՝ $(3 + 7n, 2 + 5n)$ թվերի գույգն n -ի ցանկացած ամբողջ արժեքի դեպքում հավասարման լուծում է:

Իրոք՝ $5(3 + 7n) - 7(2 + 5n) = 15 + 35n - 14 - 35n = 1$:

Դիոֆանտյան գծային հավասարման լուծումների որոնումը քննարկենք դրա առանձնահատկությունները բնութագրող օրինակների միջոցով:

Օրինակ 1: Գտնել հավասարման ամբողջ լուծումները.

$$\text{ա) } 5x - 7y = 0 \quad \text{բ) } 44x - 24y = 0 \quad \text{գ) } 15x - 21y = 2$$

$$\text{դ) } 15x - 21y = 3 \quad \text{ե) } 5x - 7y = 4 \quad \text{զ) } 22x - 19y = 1$$

$$\text{է) } 179x - 37y = 13$$

Լուծում: 1ա) Եթե հավասարումը գրենք $5x = 7y$ տեսքով, ապա կնկատենք, որ հավասարման ձախ մասը՝ $5x$ -ը, բաժանվում է 7-ի: Արտադրյալի բաժանման հատկությունից հետևում է, որ x -ը պետք է բաժանվի 7-ի, այսինքն՝ ունի $x = 7n$ տեսքը, որտեղ n -ն ամբողջ թիվ է:

Հավասարման մեջ x -ի փոխարեն տեղադրելով $7n$ ՝ կստանանք. $y = 5n$:

Հետևաբար՝ հավասարման ընդհանուր լուծումները $(7n, 5n)$ թվազույգերն են, որտեղ $n \in \mathbb{Z}$ -ին: Հետևաբար՝ $ax - by = 0$ հավասարման բոլոր լուծումները, որտեղ a -ն և b -ն փոխադարձաբար պարզ թվեր են, կգրվեն $x = bn$ և $y = an$ տեսքով, որտեղ $n \in \mathbb{Z}$:

1 բ) Այս հավասարումը նախորդից տարբերվում է այնքանով, որ x և y անհայտների գործակիցները փոխադարձաբար պարզ թվեր չեն՝ $(44, 24) = 64$: Բայց հավասարման երկու մասը բաժանելով անհայտների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի՝ 4-ի, կբերենք նույնատիպ հավասարման, որում անհայտների գործակիցները կլինեն փոխադարձաբար պարզ թվեր.

$$11x - 6y = 0:$$

Հետևաբար, ըստ 1ա)-ի՝ հավասարման ընդհանուր լուծումները կլինեն՝ $x = 6n$ և $y = 11n$ թվերը, որտեղ $n \in \mathbb{Z}$:

Նշենք, որ $ax - by = 0$ հավասարումն անվանում են համասեռ հավասարում:

1 գ) Եթե տրված հավասարումը գրենք $3(5x - 7y) = 2$ տեսքով, ապա կնկատենք, որ ցանկացած x և y ամբողջ թվերի դեպքում հավասարման ձախ մասը բաժանվում է 3-ի, իսկ աջ մասը՝ ոչ:

Հետևաբար՝ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի:

Այս հավասարումը նախորդներից տարբերվում է այնքանով, որ աջ մասը 0-ից տարբեր է: Հավասարման անհայտների գործակիցները փոխադարձաբար պարզ թվեր չեն:

Հետևաբար՝ եթե $(a, b) = d > 1$, իսկ c -ն չի բաժանվում d -ի, ապա $ax - by = c$ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի:

1 դ) Եթե հավասարման աջ և ձախ մասերը բաժանենք 3-ի ($(15, 21) = 3$), ապա կստանանք $5x - 7y = 1$ հավասարումը:

Գտնենք այդ հավասարման որևէ մասնակի լուծում: Դա կարելի է գտնել փորձելով՝ հավասարման մեջ տեղադրելով x -ի այնպիսի ամբողջ արժեք, որի մոդուլը չի գերազանցում 7-ը, և y -ի այնպիսի արժեք, որի մոդուլը չի գերազանցում 5-ը: Այդ եղանակով դժվար չէ համոզվել, որ $x = 3$ և $y = 2$ -ը հավասարման մասնակի լուծում է՝ $5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$:

Հավասարման աջ մասի մեկի փոխարեն գրենք $5 \cdot 3 - 7 \cdot 2$ արտահայտությունը.

$$5 \cdot x - 7 \cdot y = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2$$

Ստացված հավասարությունը ներկայացնենք $5(x - 3) - 7(y - 2) = 0$ տեսքով:

Ըստ 1 ա)-ում կատարված այն եզրահանգման, որ $ax - by = 0$ հավասարման լուծումներն են $x = bn$, $y = an$, կունենանք՝ $x - 3 = 7n$, և $y - 2 = 5n$:

Հետևաբար՝ տրված հավասարման բոլոր լուծումներն $x = 3 + 7n$ և $y = 2 + 5n$ թվերն են, որտեղ $n \in \mathbb{Z}$:

Հետևաբար՝ $ax + by = c$ դիոֆանտյան գծային հավասարման բոլոր լուծումներն ստանալու համար պետք է գտնել որևէ (x_0, y_0) մասնակի լուծում, որին «գումարել» այդ հավասարման համապատասխան $ax - by = 0$ համասեռ հավասարման ընդհանուր (bn, an) լուծումները՝ $x = x_0 + bn$ և $y = y_0 + an$, որտեղ $n \in \mathbb{Z}$:

1 ե) Ունենալով $5x - 7y = 1$ հավասարման $(3, 2)$ մասնակի լուծումը՝ դժվար չէ նկատել, որ $x_0 = 3 \cdot 4 = 12$ և $y_0 = 2 \cdot 4 = 8$ թվերը կլինեն $5x - 7y = 4$ հավասարման մասնակի լուծում:

Հավասարման նախորդ՝ **1 դ)** օրինակից կստանանք, որ $(12 + 7n, 8 + 5n)$ թվագույգերը, որտեղ $n \in \mathbb{Z}$ -ին, կլինեն տրված հավասարման բոլոր լուծումները:

Հաշվի առնելով $(12 + 7n; 8 + 5n) = (5 + 7(n + 1); 3 + 5(n + 1))$ հավասարությունը՝ նշենք, որ այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը կարելի է գրել նաև $(5 + 7k; 3 + 5k)$ տեսքով, որտեղ $n \in \mathbb{Z}$:

1 գ) Նշենք, որ x -ի և y -ի փոխարեն թվեր տեղադրելով միշտ չէ, որ հեշտությամբ կարող ենք գտնել հավասարման մասնակի լուծումը: Այս օրինակում ներկայացնենք մասնակի լուծումը գտնելու մի եղանակ:

Տրված հավասարումից այն անհայտը, որի գործակիցն ավելի փոքր է, արտահայտենք մյուս անհայտով:

Մեր օրինակում՝ $22x - 19y = 1$ հավասարումից y -ն արտահայտենք x -ով (քանի որ $19 < 22$) և հավասարումը ձևափոխենք այսպես.

$$y = \frac{22x - 1}{19} = \frac{19x + 3x - 1}{19} = x + \frac{3x - 1}{19}$$

Որպեսզի x -ի ամբողջ արժեքների դեպքում y -ը լինի ամբողջ թիվ, պետք է $\frac{3x-1}{19}$ լինի ամբողջ թիվ՝ $\frac{3x-1}{19} = k$: Այստեղից կստացվի $3x = 19k + 1$ հավասարումը, որից էլ, եթե x -ն արտահայտենք k -ով՝ կունենանք.

$$x = \frac{19k + 1}{3} = \frac{18k + k + 1}{3} = 6k + \frac{k + 1}{3}$$

Որպեսզի x -ը լինի ամբողջ թիվ, պետք է $\frac{k+1}{3}$ լինի ամբողջ թիվ: Հեշտ է նկատել, որ $\frac{k+1}{3}$ -ը ամբողջ թիվ է, եթե $k = -1, 2, 5, \dots$ և այլ արժեքների դեպքում: Ընտրելով $k = 2$ արժեքը՝ կստանանք.
 $x = 6 \cdot 2 + \frac{2+1}{3} = 13$, $y = 13 + \frac{3 \cdot 13 - 1}{19} = 15$:

Այսինքն՝ $x = 13$ և $y = 15$ հավասարման մասնակի լուծում է, հետևաբար՝ հավասարման ընդհանուր լուծումներն են՝ $x = 13 + 19n$ և $y = 15 + 21n$, որտեղ $n \in Z$:

Նշենք նաև, որ հավասարման մասնակի լուծումը միշտ կարելի է գտնել Էվկլիդեսի ալգորիթով:

Անհայտների գործակիցների համար (մեր օրինակում՝ 22 և 19) կիրառենք Էվկլիդեսի ալգորիթը.

$$22 = 1 \cdot 19 + 3 \quad \text{կամ} \quad 22 - 19 \cdot 1 = 3$$

$$19 = 3 \cdot 6 + 1 \quad \text{կամ} \quad 19 - 3 \cdot 6 = 1$$

Օգտվելով այս հավասարությունից՝ 1-ը «արտահայտենք» 19 և 22 թվերի միջոցով: Վերջին հավասարությունում 3-ի փոխարեն տեղադրենք առաջին հավասարության ձախ մասը.

$$1 = 19 - 3 \cdot 6 = 19 - (22 - 19 \cdot 1) \cdot 6 = 19 \cdot 7 - 22 \cdot 6 = 22 \cdot (-6) - 19 \cdot (-7)$$

Հետևաբար՝ $x = -6$ և $y = -7$ հավասարման մասնակի լուծումն է, և հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի.

$$x = -6 + 19k \quad y = -7 + 22k, \text{ որտեղ } k \in Z\text{-ին:}$$

Էվկլիդեսի ալգորիթմի կիրառումով էլ ապացուցենք, որ եթե a -ն և b -ն փոխադարձաբար պարզ թվեր են, ապա $ax - by = 1$ ցանկացած հավասարում լուծում ունի:

Եթե Էվկլիդեսի ալգորիթմով գտնենք a և b փոխադարձաբար պարզ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, ապա վերջում կստացվի 1: Այդ 1-ը հաջորդաբար արտահայտենք մնացորդների միջոցով՝ սկսելով վերջից դեպի սկիզբ: Վերջնականապես՝ 1-ը կարտահայտենք a -ով և b -ով՝ դրանց ինչ-որ գործակիցներով՝ x_0 և y_0 : Այսինքն՝ կստանանք, որ $1 = ax_0 - by_0$, ինչն էլ ապացուցում է պնդումը:

1 է) Եթե անհայտների գործակիցները մեծ թվեր են, ապա մասնակի լուծումը հարմար է գտնել Էվկլիդեսի ալգորիթմով.

$$179 = 37 \cdot 4 + 31 \quad \text{կամ} \quad 31 = 179 - 37 \cdot 4$$

$$37 = 31 \cdot 1 + 6 \quad \text{կամ} \quad 6 = 37 - 31 \cdot 1$$

$$31 = 6 \cdot 5 + 1 \quad \text{կամ} \quad 1 = 31 - 6 \cdot 5$$

$$\begin{aligned} \text{Հետևաբար՝ } 1 &= 31 - 6 \cdot 5 = 31 - (37 - 31 \cdot 1) \cdot 5 = 31 \cdot 6 - 37 \cdot 5 = \\ &= (179 - 37 \cdot 4) \cdot 6 - 37 \cdot 5 = 179 \cdot 6 - 37 \cdot 5 = 179 \cdot 6 - 37 \cdot 29 \end{aligned}$$

Քանի որ (6; 29) թվազույգը $179x - 37y = 1$ հավասարման մասնակի լուծումն է, հետևաբար՝ $x_0 = 6 \cdot 13 = 78$ և $y_0 = 29 \cdot 13 = 377$ թվերը կլինեն տրված հավասարման մասնակի լուծում:

Հետևաբար՝ տրված հավասարման լուծումներն են.

$$x = 78 + 37n \text{ և } y = 377 + 179n, \text{ որտեղ } n \in \mathbb{Z} :$$

Ներկայացնենք դիոֆանտյան երկրորդ աստիճանի հավասարման լուծման մի քանի եղանակ:

Օրինակ 2: Գտնել հավասարման ամբողջ լուծումները.

ա) $xy - 5x + 2y = 17$

բ) $x^2 - 4xy + 5y^2 = 13$

գ) $4x^2 - xy + 3y - 13x + 4 = 0$

Լուծում: 2 ա) Հավասարումը ձևափոխենք այսպես.

$$xy - 5x + 2y - 10 = 7$$

$$x(y - 5) + 2(y - 5) = 7$$

$$(x + 2)(y - 5) = 7$$

Քանի որ x -ը և y -ն ամբողջ թվեր են, ուստի $x + 2$ և $y - 5$ նույնպես կլինեն ամբողջ թվեր: Հետևաբար՝ դրանց արտադրյալը հավասար կլինի 7-ի հետևյալ 4 դեպքում.

$$\begin{cases} x + 2 = 7 \\ y - 5 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 = -7 \\ y - 5 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 = 1 \\ y - 5 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 = -1 \\ y - 5 = -7 \end{cases}$$

Մրանց լուծումներն էլ կլինեն տրված հավասարման ամբողջ լուծումները. (5, 6), (-9, 4), (-1, 12) և (-3, -2):

2 բ) Հավասարումը ներկայացնենք $(x - 2y)^2 + y^2 = 16$ տեսքով:

16-ը ներկայացնենք երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով. $16 = 0^2 + 4^2 = 0^2 + (-4)^2$:

Հետևաբար՝ հավասարությունը տեղի կունենա հետևյալ 4 դեպքում.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = -4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Լուծելով այդ համակարգերը՝ կստանանք տրված հավասարման ամբողջ լուծումները՝ (8, 4), (-8, -4), (4, 0) և (-4, 0):

2 գ) Հավասարումից y -ն արտահայտենք x -ով.

$$xy - 3y = 4x^2 - 13x + 4$$

$$y(x - 3) = 4x^2 - 13x + 4$$

$$y = \frac{4x^2 - 13x + 4}{x - 3}$$

Ստացված արտահայտությունը ձևափոխենք հետևյալ կերպ.

$$y = \frac{4x^2 - 13x + 4}{x - 3} = \frac{4x^2 - 12x - x + 3 + 1}{x - 3} = \frac{4x(x - 3) - (x - 3) + 1}{x - 3} = 4x - 1 + \frac{1}{x - 3} :$$

Պարզ է, որ y -ը կլինի ամբողջ թիվ, եթե $x - 3 = 1$ կամ $x - 3 = -1$:

Հետևաբար՝ $x = 4$ կամ $x = 2$: Յուրաքանչյուր x -ի համար գտնենք y -ի համապատասխան արժեքը: Եթե $x = 4$, ապա $y = 4 \cdot 4 - 1 + \frac{1}{4-3} = 16$: Եթե $x = 2$, ապա $y = 4 \cdot 2 - 1 + \frac{1}{2-3} = 6$:

Հետևաբար՝ հավասարման ամբողջ լուծումներն են $(4, 16)$ և $(2, 6)$:

Վարժություններ և խնդիրներ

- Ապացուցե՛ք, որ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի. ա) $2x - 3y = 6,5$ բ) $15x - 24y = 5$
- Ապացուցե՛ք, որ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի. ա) $(x - 1)^2 + y^2 = -1$ բ) $x^2 + (y - 2)^2 = 7$
- Գտե՛ք հավասարման ամբողջ լուծումները.
ա) $x(y + 2) = 11$ բ) $(3 - x)(y + 10) = 13$
- Գտե՛ք $x^2 - y^2 = 17$ հավասարման այն լուծումները, որոնք՝ ա) բնական թվեր են, բ) ամբողջ թվեր են:
- Գտե՛ք հավասարման բնական լուծումները.
ա) $x^2 - y^2 = 16$ բ) $4x^2 - y^2 = 19$
- Ապացուցե՛ք, որ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի. ա) $x^2 - y^2 = 58$ բ) $x^2 - 3xy = 6$
- Գտե՛ք հավասարման ամբողջ լուծումները.
ա) $x^2 + 6x + 22 = y^2$ բ) $x^2 + x - y^2 = 3$
- Լուծե՛ք հավասարումը.
ա) $x^2 + y^2 + 25 = 10y$ բ) $x^2 + y^2 + 5 = 2x + 4y$
- Ապացուցե՛ք, որ հավասարումը լուծում չունի.
ա) $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 14 = 0$
բ) $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2y + 3 = 0$
- Գտե՛ք հավասարման բնական լուծումները.
ա) $2x^2 + 3xy = 119$ բ) $3x^2 - 2xy = 53$

11. Գտե՛ք հավասարման ամբողջ լուծումները.

ա) $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2$

բ) $13x^2 - 4xy + y^2 = 10$

12. Ապացուցե՛ք, որ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի. ա) $x^2 - 3y = 47$

բ) $x^2 + 4y = 95$

գ) $4x^2 - 3y^2 = 11$

13 – 21. Գտե՛ք հավասարման ամբողջ լուծումները.

13. ա) $x^2 - 2xy = x + 8$

բ) $y^3 + y = xy + 7$

14. ա) $xy + 2y = 3x + 5$

բ) $2xy + 3y = 8x + 13$

15. ա) $xy = x + 7y$

բ) $2xy = x + 22y$

16. ա) $x^2 + xy - 6y^2 = 1$

բ) $2x^2 - 11xy + 5y^2 = 11$

17. ա) $y^2 - 2xy - 2x = 6$

բ) $y^2 + xy + 2x = 9$

18. ա) $7x^2 - xy + 2y - 12x - 3 = 0$

բ) $4x^2 - xy + 3x - y + 2 = 0$

19. ա) $11x - 7y = 1$

բ) $17x - 27y = 1$

գ) $13x + 5y = 1$

դ) $47x + 19y = 1$

20. ա) $9x - 11y = 3$

բ) $8x + 13y = 4$

գ) $5x + 6y = 4$

դ) $6x - 17y = 2$

21. ա) $122x - 35y = 9$

բ) $25x + 147y = 11$

գ) $175x - 51y = 13$

դ) $64x + 235y = 10$

22. Գտե՛ք $119x - 53y = 5$ հավասարման այն լուծումը, որի դեպքում $|x - y|$ -ը լինի փոքրագույնը:

23. Ունենալով 7 և 9 և տարողությամբ ամաններ՝ ինչպե՞ս կարելի է ծորակից վերցնել 1 և ջուր:

24. Ունենալով 8 և 11 և տարողությամբ երկու աման՝ ինչպե՞ս կարելի է ծորակից վերցնել 7 և ջուր:

25. Հնարավոր է արդյոք 8,6 տ բենզինը տեղավորել 750 լ և 400 լ տարողությամբ տարաներում այնպես, որ բոլոր տարաները լինեն ամբողջությամբ լցված:

26. 1000 լ գինին տեղավորեցին 35 լ և 75 լ տարողությամբ տակառներում: Ամենաքիչը քանի՞ տակառ է անհրաժեշտ՝ պայմանով, որ ոչ մի տակառ թերի լցված չլինի:

27. Փոքր ձուն արժե 55 դրամ, իսկ մեծը՝ 72 դրամ: Քանի՞ ձու կարելի է գնել վճարելով 4000 դրամ:

28. 12 մարդ տանում է 12 հաց, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր տղամարդ տանում է 2 հաց, յուրաքանչյուր կին՝ կես հաց, իսկ յուրաքանչյուր երեխա՝ $\frac{1}{4}$ հաց: Նրանց մեջ քանի՞ տղամարդ, քանի՞ կին և քանի՞ երեխա կա:

29. Աքլորն արժե 10 դոլար, հավը՝ 6 դոլար, իսկ 3 ճուտը՝ 1 դոլար: 200 դոլարով գնել են 100 թռչուն: Յուրաքանչյուր թռչունից քանի՞ հատ են գնել:

30. Մորեխը ցատկում է ուղղագիծ ճանապարհի երկայնքով: Եթե աջ է ցատկում, ապա ցատկի երկարությունը 45 սմ է, իսկ եթե ձախ է ցատկում՝ ցատկի երկարությունը 39 սմ է: Կարո՞ղ է արդյոք նա ցատկելով հայտնվել սկզբնական դիրքից՝

ա) 2 սմ աջ, բ) 3 սմ ձախ, գ) 3 սմ աջ:

Լրացուցիչ վարժություններ և խնդիրներ

- Ձև՝ 10^4 է, թե՞ կենտ թիվը.
ա) 8^{17} բ) 14^{11} գ) 7^{12} դ) 9^7
- Թվերից ո՞րն է բաժանվում 8-ի.
ա) 8^{13} բ) 4^{11} գ) 7^8 դ) 26^{11}
- Գտե՛ք թվի վերջին թվանշանը.
ա) 71^9 բ) 5^{24} գ) 6^{23}
դ) 4^8 ե) 9^9 զ) 49^{50}
- Քանի՞ հատ 0 է գրված թվի վերջում.
ա) 20^9 բ) $5^{11} \cdot 16^3$ գ) $72 \cdot 5^{10}$
դ) $21!$ ե) $77!$ զ) $130!$
- Գտե՛ք թվի վերջին 7 թվանշանները.
ա) $18^6 \cdot 5^6$ բ) $14^6 \cdot 5^7$
- Գտե՛ք թվի վերջին թվանշանը.
ա) 2^{13} բ) 3^{15} գ) 7^{17}
դ) 8^{19} ե) 23^{25} զ) 22^{26}
- Գտե՛ք թվի վերջին թվանշանը.
ա) 222^{22^2} բ) 4^{4^4} գ) 9^{9^9}
- Գտե՛ք արտահայտության վերջին թվանշանը.
ա) $28^{28} + 33^{51}$ բ) $14^{17} \cdot 37^{34}$ գ) $19^{20} - 12^{19}$
դ) $35^{18} - 26^{17}$ ե) $51^{26} + 53^{26}$

9. Ապացուցե՛ք, որ.

- ա) $91^{19} + 19$ բաժանվում է 10-ի, բ) $16^{61} - 61$ բաժանվում է 5-ի,
գ) $7 \cdot 10^{20} + 71$ բաժանվում է 3-ի, դ) $14 \cdot 10^7 - 5$ բաժանվում է 9-ի,
ե) $10^{10} + 10^5 + 1$ բաժանվում է 3-ի, զ) $5 \cdot 10^{11} + 4$ բաժանվում է 9-ի,
է) $29^{45} - 18^{18}$ բաժանվում է 5-ի, ը) $37^{25} - 33^{23}$ բաժանվում է 10-ի:

10. Ապացուցե՛ք, որ.

- ա) $10^{22} + 87$ բաժանվում է 11-ի, բ) $2 \cdot 10^{20} - 5$ բաժանվում է 15-ի,
գ) $4 \cdot 10^{21} + 26$ բաժանվում է 33-ի,
դ) $4^4 \cdot 5^7 + 2^5 \cdot 5^4 + 5$ բաժանվում է 45-ի,
ե) $10^7 + 10^4 + 10^3 + 10^2$ բաժանվում է 55-ի:

11. Ապացուցե՛ք, որ թիվը բաղադրյալ է.

- | | | |
|---------------------------|------------------------|-------------------|
| ա) $23^{23} + 25^{25}$ | բ) $21^{17} - 14^{13}$ | գ) $10^{20} + 53$ |
| դ) $5 \cdot 10^{17} - 53$ | է) $10^{31} + 1$ | զ) $16^{16} + 9$ |

12. Գտե՛ք 20-ից փոքր այն բնական թվերը, որոնց դեպքում՝

- ա) $\frac{2^n - 1}{3}$ բնական թիվ է, բ) $3^n - 2$ բաժանվում է 5-ի,
գ) $7^n + 1$ բաժանվում է 10-ի:

13. Ապացուցե՛ք, որ n -ի ցանկացած բնական արժեքի դեպքում՝

- ա) $10^n + 8$ բաժանվում է 9-ի, բ) $6^n + 9$ բաժանվում է 15-ի:

14. Գտե՛ք թվի բաժանարարների քանակը.

- ա) 3^5 բ) $2 \cdot 3^5$ գ) $2^2 \cdot 3^5$ դ) $3^5 \cdot 5^7$

15. Գտե՛ք թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ու ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.

- | | | | | | |
|----------------------------------|---|----------------------------|----------------------|---|-------------------|
| ա) $7 \cdot 2^{10} \cdot 3^{11}$ | և | $2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5$ | բ) $7^{20} + 7^{14}$ | և | 7^{18} |
| գ) $3^{41} + 2 \cdot 3^{41}$ | և | $2 \cdot 3^{43}$ | դ) $2^{15} + 2^{13}$ | և | $5^{19} - 5^{18}$ |
| է) 18^9 | և | 12^8 | զ) 6^{13} | և | 4^9 |

16. Ապացուցե՛ք, որ.

- ա) 24^7 բաժանվում է 32^4 -ի, բ) $8!$ բաժանվում է 2^7 -ի,
գ) $16!$ բաժանվում է 2^{15} -ի, դ) $12!$ բաժանվում է 243 -ի,
ե) $15!$ բաժանվում է 9^3 -ի, զ) $18!$ բաժանվում է 6^7 -ի:

17. Կրճատե՛ք կոտորակը՝ մինչև ստացվի անկրճատելի կոտորակ.

- ա) $\frac{10^6}{5^5}$ բ) $\frac{15^7}{9^3}$ գ) $\frac{8^5}{12^8}$ դ) $\frac{7^4}{14^7}$ ե) $\frac{21^6}{35^6}$

18. Հաշվե՛ք.

- ա) $\frac{3^{11} \cdot 27^8}{9^{17}}$ բ) $\frac{10^{13}}{25^6 \cdot 2^{11}}$ գ) $\frac{35^8 \cdot 2^{11}}{5^6 \cdot 14^8}$ դ) $\frac{22^{15} \cdot 6^{16}}{33^{14} \cdot 32^6}$

19. Կրճատե՛ք կոտորակը՝ մինչև ստացվի անկրճատելի կոտորակ, և գտե՛ք դրա հայտարարը.

- ա) $\frac{10 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 19 \cdot 20}{2^{13}}$ բ) $\frac{20 \cdot 21 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 30}{6^{10}}$ գ) $\frac{30!}{10^{26}}$

20*. Գտե՛ք ամենամեծ n բնական թիվը, որի դեպքում $\frac{50!}{7^n}$ բնական թիվ է:

21*. Գտե՛ք ամենամեծ n բնական թիվը, որի դեպքում՝

- ա) $10!$ բաժանվում է 2^n -ի, բ) $81!$ բաժանվում է 3^n -ի,
գ) $30!$ բաժանվում է 6^n -ի, դ) $36!$ բաժանվում է 12^n -ի:

22. Համեմատե՛ք թվերը.

- ա) 8^{12} և 32^7 բ) 2^{30} և 3^{20} գ) 2^{35} և 5^{15}

23*. Ապացուցե՛ք, որ.

- ա) $3^{55} < 2^{88} < 3^{56}$ բ) $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$ գ) $2^{27} < 5^{12} < 2^{28}$

24*. Թվերը դասավորե՛ք աճման կարգով.

ա) 2^{21} , 5^9 , 11^6 բ) 2^{24} , 3^{15} , 5^{10}

25*. Քանի՞ թվանշան ունի 2^{39} -ը:

26. Ի՞նչ մնացորդ կստացվի, եթե.

ա) 19^{20} բաժանենք 10-ի, բ) 37^{47} բաժանենք 5-ի:

27. Ի՞նչ մնացորդ կստացվի n -ը 4-ի բաժանելիս, եթե.

ա) 8^n -ը 10-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ,
բ) 7^n -ը 5-ի բաժանելիս ստացվում է 4 մնացորդ:

28. Ապացուցե՛ք, որ եթե.

ա) n -ը զույգ է, ապա $8^n - 2^n$ թիվը բաժանվում է 10-ի,
բ) n -ը կենտ է, ապա $7^n + 3^n$ թիվը բաժանվում է 10-ի:

29. Ապացուցե՛ք, որ.

ա) $32^6 + 16^7 + 8^9 + 4^{12}$ թիվը բաժանվում է 89-ի,
բ) $125^{24} - 27^{27} + 25^{35} + 9^{39}$ թիվը բաժանվում է 26-ի:

30. Ապացուցե՛ք, որ.

ա) $3^{27} + 1$ թիվը բաժանվում է 14-ի,
բ) $2^{42} - 1$ թիվը բաժանվում է 129-ի:

31. Գտե՛ք թվի բաժանարարների քանակը.

ա) $6^{11} - 6^9$ բ) $8^5 + 2^{13} + 4^8$ գ) $25^8 + 5^{13}$

32. Գտե՛ք թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը.

ա) $5^{14} - 5^{10}$ և 6^{10} բ) $3^{20} - 3^{14}$ և 2^{10}
գ) $7^{12} - 7^{10}$ և $3^{18} + 3^{15}$ դ) $7^{13} - 7^{10}$ և $6^{13} + 6^{10}$

33. Բազմանդամի արժեքը հաշվե՛ք հարմար եղանակով.

ա) $x^5 - 18x^4 + 290x^2 - 16x + 8$, երբ $x = 17$,

բ) $x^6 - 398x^4 - 43x^3 + 61x^2 - 21x + 13$, երբ $x = 20$:

34. Միլիոնը չգերազանցող թվերի մեջ՝

ա) քանի՞ անգամ է բնական թվի քառակուսիների քանակը բնական թվի խորանարդների քանակից շատ,

բ) քանի՞ բնական թիվ կա, որոնք բնական թվի քառակուսի են կամ խորանարդ:

35. Ապացուցե՛ք, որ $10^{19} + 10^{17} - 200$ թիվը բաժանվում է.

ա) 25-ի,

բ) 45-ի,

գ) 75-ի:

36. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած բնական n -ի դեպքում $7 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^{n+2} - 56$ թիվը բաժանվում է 18-ի:

37*. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած բնական n -ի դեպքում $3 \cdot 10^{2n+7} + 2 \cdot 10^{2n} - 131$ թիվը բաժանվում է 33-ի:

38. Ապացուցե՛ք, որ $1^3 + 2^3 + \dots + 30^3$ թիվը բաժանվում է 31-ի:

39. Գտե՛ք $19^3 + 31^3 + 3^3$ թիվը 50-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:

40. Հաշվե՛ք.

ա) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ արտադրյալը,

բ) $\frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2 \cdot 9 + 1}{9^2 \cdot 10^2}$ գումարը:

41. Ապացուցե՛ք, որ.

ա) $2^{40} - 2^{21} + 1$ թիվը բաժանվում է $(2^{10} + 1)$ թվին,

բ) $3^{30} + 3^{21} + 3^{11} + 1$ թիվը բաժանվում է

$3^{20} + 3^{11} - 3^{10} + 1$ թվին:

42. Ապացուցե՛ք, որ թիվը բաղադրյալ է.

ա) $9^{17} - 4^{13}$

բ) $2^{45} + 1$

գ) $2^9 + 5^{12}$

դ) $8^{19} - 9^{12}$

ե)* $2^{2014} + 1$

զ)* $3^{20} - 3^{11} + 1$

է)* $8^{10} - 4^8 + 1$

ը)* $9^{10} + 6^{10} + 4^9$

43*. Ապացուցե՛ք, որ թիվը բաղադրյալ է.

ա) 3999991

բ) 1000027

գ) 2015·2019+4

44*. Քանի՞ 0 հատ 0 կա թվի տասնորդական գրությունում.

ա) $(10^{10} + 1)^2$

բ) $(10^8 + 7)^2$

գ) $(10^{12} - 1)^2$

45*. Քանի՞ 9 հատ 9 կա $\underbrace{99 \dots 9^2}_{10}$ թվի տասնորդական գրու-

թյունում:

46*. Ապացուցե՛ք, որ թիվը բնական թվի քառակուսի է.

ա) $1 \underbrace{00 \dots 0}_{14} 6 \underbrace{00 \dots 0}_{14} 9$

բ) $1 \underbrace{00 \dots 0}_{15} 2 \underbrace{00 \dots 0}_{15} 1$

47. Ապացուցե՛ք, որ n -ի ցանկացած բնական արժեքի դեպքում թիվը բնական թվի քառակուսի է.

ա) $9 \cdot 10^{2n} - 12 \cdot 10^n + 4$

բ) $4 \cdot 10^{2n} + 2 \cdot 10^{n+1} + 25$

48*. Ապացուցե՛ք, որ n -ի ցանկացած բնական արժեքի դեպքում թիվը բնական թվի քառակուսի է.

ա) $1 \underbrace{00 \dots 0}_n 4 \underbrace{00 \dots 0}_n 4$

բ) $\underbrace{99 \dots 9}_n \underbrace{00 \dots 0}_n 25$

գ) $\underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{55 \dots 5}_n + 1$

դ) $\underbrace{44 \dots 4}_n \underbrace{88 \dots 8}_n + 1$

49*. Ապացուցե՛ք, որ n -ի ցանկացած բնական արժեքի դեպքում $1 \underbrace{00 \dots 0}_n 4 \underbrace{00 \dots 0}_n 3$ բաղադրյալ թիվ է:

50*. Ապացուցե՛ք, որ n -ի ցանկացած բնական արժեքի դեպքում հավասարությունը ճիշտ է.

$$\underbrace{88 \dots 8}_{n-1} 9 \cdot 7 \underbrace{99 \dots 9}_n = 7 \underbrace{11 \dots 1}_{2n} :$$

51*. Ապացուցե՛ք, որ n -ի ցանկացած բնական արժեքի դեպքում $100 \underbrace{11 \dots 1}_n 7$ թիվը բաժանվում է 53-ի:

52*. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունեն n -ի անվերջ բնական արժեքներ, որոնց դեպքում $125 \cdot 3^{2n+1} + 2^{7n+2}$ թիվը բաղադրյալ է:

53. Ապացուցե՛ք, որ եթե a^2 -ին բաժանվում է $(a + b)$ -ի, ապա b^2 -ին նույնպես բաժանվում է $(a + b)$ -ի:

54. Գտե՛ք $x - y$ արտահայտության արժեքը, եթե հայտնի է, որ $x^2 - y^2$ -ին պարզ թիվ է:

55. Դիցուք՝ a թիվն այնպիսին է, որ $a + \frac{1}{a} = 2,9$: Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.

ա) $a^2 + \frac{1}{a^2}$

բ) $a^3 + \frac{1}{a^3}$

գ) $a^4 + \frac{1}{a^4}$

56. Դիցուք՝ a թիվն այնպիսին է, որ $a - \frac{1}{a} = \frac{5}{6}$: Գտե՛ք արտահայտության արժեքը.

ա) $a^2 + \frac{1}{a^2}$

բ) $a^3 - \frac{1}{a^3}$

գ) $a^4 + \frac{1}{a^4}$

57. Երկու թվերի գումարը հավասար է $\frac{5}{6}$, իսկ արտադրյալը՝ $\frac{1}{6}$:
Գտնե՛ք այդ թվերի քառակուսիների գումարը:

58. Գտնե՛ք x և y բնական թվերն այնպես, որ.

ա) $x^2 - 2xy = 20$

բ) $x^2 - y^2 = 28$

59. Ապացուցե՛ք, որ գոյություն չունեն x և y բնական թվերն այնպես, որ $x^2 - y^2 = 30$:

60. Գտնե՛ք x և y թվերը, եթե.

ա) $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 25 = 0$

բ) $x^2 - 6xy + 13y^2 - 4y + 1 = 0$

61. Գտնե՛ք x և y ամբողջ թվերը, եթե.

ա) $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$

բ) $xy - 5x - 7y + 34 = 0$

62*. Գտնե՛ք n -ի այն բոլոր բնական արժեքները, որոնց դեպքում արտահայտության արժեքը բնական թվի քառակուսի է.

ա) $n^2 + 25$

բ) $n^2 - 10n + 38$

գ) $n^2 - 7n + 7$

63*. Ապացուցե՛ք, որ n -ի ցանկացած բնական արժեքի դեպքում արտահայտության արժեքը չի կարող լինել բնական թվի քառակուսի.

ա) $n^2 - 14$

բ) $n^2 + 5n + 8$

գ) $n^2 + 3n + 3$

64*. Ներկայացե՛ք արտադրյալի տեսքով.

ա) $x^2 + 2x - 15$

բ) $x^2 - 10x + 16$

գ) $x^2 + x - 20$

դ) $3x^2 + 4x + 1$

65*. Ներկայացնե՛ք արտադրյալի տեսքով.

ա) $x^4 + x^2 + 1$

բ) $x^4 + 4x^2 - 5$

գ) $x^4 - 15x^2 + 9$

դ) $24x^4 - 30x^2 + 9$

66*. Ներկայացնե՛ք արտադրյալի տեսքով.

ա) $4a^4 + 1$

բ) $a^4 + 324$

գ) $x^8 + 4$

դ) $x^8 - 16$

67*. Ներկայացնե՛ք արտադրյալի տեսքով.

ա) $a^3 + a^2 - 12$

բ) $a^3 + a^2 + 4$

գ) $a^3 - 7a + 6$

դ) $a^3 + 2a^2 - 3$

68*. Ապացուցե՛ք, որ n -ի 1-ից մեծ ցանկացած բնական արժեքի դեպքում թիվը բաղադրյալ է.

ա) $n^4 + 4$

բ) $4n^4 + 1$

գ) $n^8 + 2n^2 - 3$

69. Ապացուցե՛ք, որ եթե.

ա) $x^2 + y^2 = 2xy$, ապա $x = y$

բ) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$, ապա $x = y = z$

70. Ապացուցե՛ք, որ a -ի և b -ի ցանկացած արժեքների դեպքում.

ա) $a^2 + b^2 \geq 2ab$

բ) $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$

գ) $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$

դ) $9a^2 + 16b^2 \geq 24ab$

71. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած a, b, c թվերի դեպքում՝

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac:$$

72*. Ապացուցե՛ք, որ $\frac{7}{16} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{15^2} < \frac{14}{15}$:

73*. Ներկայացե՛ք արտադրյալի տեսքով.

ա) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ բ) $a^2 + b^2 - a^2b^2 + 4ab - 1$
գ) $a^2 + b^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 8c^2$

74*. Քառակուսու յուրաքանչյուր գագաթում գրված է մեկ բնական թիվ, իսկ յուրաքանչյուր կողմի վրա՝ այդ կողմի ծայրակետերում գրված թվերի արտադրյալը: Կողմերի վրա գրված թվերի գումարը հավասար է 91-ի: Գտե՛ք գագաթներում գրված թվերի գումարը:

75. 100 թիվն ինչ-որ տոկոսով մեծացրեցին, այնուհետև նույն տոկոսով էլ փոքրացրեցին, և ստացվեց 84: Քանի՞ տոկոսով էին կատարվել մեծացումն ու փոքրացումը:

76. Ճգնաժամի երկու տարիների ընթացքում գործարանի արտադրանքը նվազեց 51%-ով, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր տարի նվազեց միևնույն տոկոսի չափով: Քանի՞ տոկոսով նվազեց գործարանի արտադրանքը մեկ տարվա ընթացքում:

77. Գտե՛ք այն վեցանիշ թիվը, որը վերջանում է 713-ով և բաժանվում է 7-ի, 11-ի, 13-ի:

78. Ապացուցե՛ք, որ n -ի ցանկացած բնական արժեքի դեպքում. ա) $n^3 - n$ թիվը բաժանվում է 6-ի,

բ) $n^4 - n^2$ թիվը բաժանվում է 12-ի:

79. Ապացուցե՛ք, որ n -ի ցանկացած բնական արժեքի դեպքում. ա) $n^5 + 9n$ թիվը բաժանվում է 10-ի,

բ) $n^5 - 5n^3 + 4n$ թիվը բաժանվում է 120-ի:

80. Ապացուցե՛ք, որ n -ի և m -ի բնական արժեքների դեպքում $n^2 + m^2$ թիվը բաժանվում է 3-ի, ապա nm թիվը բաժանվում է 9-ի:

81*. Ապացուցե՛ք, որ n -ի և m -ի բնական արժեքների դեպքում $n^3 - m^3$ թիվը բաժանվում է 6-ի, ապա $n - m$ թիվը նույնպես բաժանվում է 6-ի:

82*. Քանի՞ նշանակալից թվանշան ունի $\frac{333}{5120000}$ թվի տասնորդական գրառման կոտորակային մասը:

83*. Գտե՛ք n բնական թիվը, եթե.

$$\text{ա) } 0, (6 *) = \frac{n}{11} \quad \text{բ) } 0, (6 * 4) = \frac{n}{111} \quad \text{գ) } 0, (* 51 *) = \frac{n}{101}$$

84*. Քանի՞ տարեկան է պապիկը, եթե 7 տարի առաջ նրա տարիքն 8-ի բազմապատիկ էր, իսկ 10 տարի հետո կլինի 9-ի բազմապատիկ:

85*. Գտե՛ք այն բնական թիվը, որի իրենից տարբեր ամենամեծ բաժանարարը 14 անգամ մեծ է այդ թվի 1-ից տարբեր ամենավոքր բաժանարարից:

86*. Գոյություն ունի՞ արդյոք 15 հատ բաժանարար ունեցող թիվ, որը բաժանվում է.

$$\text{ա) } 100\text{-ի,} \quad \text{բ) } 1000\text{-ի:}$$

87. Գտե՛ք այն բոլոր թվերը, որոնք 7-ի բաժանելիս քանորդում և մնացորդում ստացվում են նույն թվերը:

88. Գտե՛ք ամենավոքր բնական թիվը, որը 2-ով բազմապատկելիս ստացվում է բնական թվի քառակուսի, իսկ 3-ով բազմապատկելիս՝ խորանարդ:

89*. Գտե՛ք այն թիվը, որը 12-ի բազմապատիկ է և ունի 14 բաժանարար:

90. Գտե՛ք ամենափոքր թիվը, որը 89!-ի բաժանարար չէ:

91*. Գտե՛ք այն զույգ թիվը, որն ունի 11 բաժանարար:

92*. Գտե՛ք այն ամենափոքր կենտ թիվը, որն ունի 7 բաժանարար:

93*. Գտե՛ք այն եռանիշ թվերի քանակը, որոնք ունեն 3 բաժանարար:

94*. Գոյություն ունի՞ արդյոք բնական թիվ, որի խորանարդի բաժանարարի քանակը հավասար է.

ա) 8-ի,

բ) 13-ի:

95*. Գոյություն ունի՞ արդյոք բնական թիվ, որի քառակուսին բաղկացած է հինգ հատ 4, չորս հատ 1 և մի քանի 0 թվանշաններից:

96*. Ապացուցե՛ք, որ 81 հատ մեկով գրված թիվը բաժանվում է 81-ի:

97*. Գտնել 1-ով կազմված ամենափոքր թիվը, որը բաժանվում է $\underbrace{33 \dots 3}_{10}$ -ի:

98*. Գոյություն ունե՞ն արդյոք երեք թվեր, որոնցից ոչ մեկը չի բաժանվում մնացածներից ոչ մեկին, բայց յուրաքանչյուրի քառակուսին բաժանվում է մնացած թվերից յուրաքանչյուրին:

99*. Թվի առաջին թվանշանը 7 է: Երբ այդ թվանշանը տեղափոխեցին թվի վերջը, թիվը 2 անգամ փոքրացավ: Գտե՛ք այդ թիվը:

100*. Ապացուցե՛ք, որ եթե թիվը 4-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ, ապա.

ա) զույգ բաժանարարների քանակը հավասար է կենտ բաժանարարների քանակին,

բ) զույգ բաժանարարների գումարը 2 անգամ մեծ է կենտ բաժանարարների գումարից,

գ) բոլոր բաժանարարների գումարը 3-ի բազմապատիկ է:

Պատասխաններ և ցուցումներ

Թեմա 1

1. 300% 2. 37,5 % 3. Երկուսում էլ՝ նույն գնով: 4. 65% 5. Չի փոխվի: 6. 25% 7. $2\frac{11}{32}\%$ 8. Պակասեց 2,8%-ով: 9. 40 և 30 10. ա) 0,5 տ, բ) 2 տ 11. 10 անգամ: 12. ա) ո՛չ, բ) այո՛ 13. ա) b-ի 5 %-ը, բ) a-ի 5 %-ը: 14. 4 տարի: 15. 7 անգամ: 16. 8 % 17. 25% 18. 20% 19. 25% 20. 25% 21. 75% 22. 36% 23. 50% 24. 3 25. ա) 5, բ) 25, գ) 10 կամ 20

Թեմա 2

1. 12 ժ 2. 20 ժ 3. 8 ժ 4. 0,5 մասը: Երկրորդը: 5. 30 ժ 6. 15 ժ 7. 35 օր 8. 13 ժ 20 ր 9. ա) 18 ր, բ) 3 ր 36 վրկ 10. 24 վրկ 11. 4 ժ 12. ա) 12 օր, բ) 20 օր գ) 10 օր 13. 12 ժ 14. 24 ժ, 40 ժ 15. 12 ժ 16. ա) դեպքում՝ 1,2 և քիչ: 17. 10 18. 5 19. 16 օր 20. 7,5 ժ 21. 14 22. 2 մ³ 23. 72 ար 24. 60 օր: Ցուցում. Եթե սկզբում 60 օր փորեն Պետրոսը և Անդրանիկը, այնուհետև 60 օր՝ Հովհաննեսը և Անդրանիկը, ապա կփորվի $\frac{60}{20} + \frac{60}{15} = 7$ խրամատը, որից $\frac{60}{12} = 5$ – ը փորել են Պետրոսը և Հովհաննեսը: 25. 2,5 անգամ: Ցուցում: Մինչև նրանք հերթով փորեն 1 փուս՝ այդ ընթացքում մյուս երկուսը կփորեն 1,5 նույնատիպ փուս:

Թեմա 3

2. 10a + 7 բ) 100a + b + 3000 գ) 1000a + 10b + 50704 դ) 1111a
3. ա) x + 5000 բ) 10x + 6 գ) 100x + 21 դ) 10x + 70004

4. p) $3 \cdot 10^{11} + 4$ q) $5 \cdot 10^{18} + 6 \cdot 10^{10} + 2$

5. ա) $\underbrace{555577 \dots 7}_{8 \text{ հատ}}$ բ) $\underbrace{88 \dots 8}_{7 \text{ հատ}} 921$ գ) $\underbrace{77 \dots 7}_{9 \text{ հատ}} \underbrace{811 \dots 1}_{9 \text{ հատ}} 0$ դ) $1 \underbrace{22 \dots 2}_{29 \text{ հատ}} 1$

6.ա) $\underbrace{99 \dots 9}_{8 \text{ հատ}} 62$ բ) $88888 \underbrace{33 \dots 3}_{10 \text{ հատ}}$ գ) $\underbrace{99 \dots 9}_{9 \text{ հատ}} 5 \underbrace{00 \dots 0}_{10 \text{ հատ}}$ դ) $66665 \underbrace{88 \dots 8}_{9 \text{ հատ}} 9$

7. ա) $\underbrace{300 \dots 0}_{10 \text{ հատ}} 18$ բ) $\underbrace{99 \dots 9}_{15 \text{ հատ}}$ գ) $\underbrace{244 \dots 4}_{13 \text{ հատ}} 2$ դ) $740 \underbrace{81408140 \dots 8140}_{9 \text{ հատ}} 74$

8. ա) $\underbrace{4040 \dots 40}_{19 \text{ հատ}} 4$ բ) $\underbrace{22 \dots 2}_{20 \text{ հատ}}$ գ) $\underbrace{200 \dots 0}_{19 \text{ հատ}} 2$ դ) $\underbrace{270270 \dots 270}_{9 \text{ հատ}} 27$

10. 54 11. 4 12. 92 14. 45 15. 67 16. ա) 432 և 864 բ) 643 17. 239
19. 365 21. 630 կամ 924 22. 5618 23. 2795 25. 10256
26. 512820 27. 923076 28. 65473 29. 4172 և 3417 30. 62 և 6257

Թեմա 4

1. ա) Ո՛չ ճշտախոսը, ո՛չ էլ ստախոսը բ) <<Ժամը ու՞թն է>>:
2. ա) <<Դու ճշտախո՞ս ես>> բ) <<Օրը արևո՞տ է>>:
3. ա) Ստախոսը բ) Ե՛վ ճշտախոսը, և՛ ստախոսը գ) Ո՛չ ճշտախոսը, ո՛չ էլ ստախոսը դ) ճշտախոսը: 4. Ճշտախոս: 5. 1
6. <<Մեկը>>: 7. ա) 0 կամ 6 բ) 3 գ) 2 կամ 3: 5 հոգու դեպքում՝
ա) 0 կամ 5 բ) անհնար է գ) 2 8. <<Դու այս քաղաքում ես ապրո՞ւմ>>: 9. Անին՝ 9, մյուսները՝ 7 10. 25 11. 13 12. 5 13. 1009
14. ա) Արմենը՝ ճշտախոս, Բաբկենը՝ խորամանկ, Գուրգենը՝ ստախոս բ) Արմենը՝ խորամանկ, Բաբկենը՝ ստախոս, Գուրգենը՝ ճշտախոս գ) հնարավոր չէ որոշել: 15. Գիշան՝ ճշտախոս, Կիշան՝ ստախոս, Սիշան՝ խորամանկ: 16. Ցուցում. Բոլորին տալ հետևյալ հարցը. <<Ձեր մեջ մեկ ճշտախո՞ս կա>>: Այնուհետև ում պատասխանը տարբերվում է մյուսների

պատասխանից նրան հարցնել մյուսներից մեկի մասին: **17.** Ա-ին հարցնել <<Բ-ն խորամանկն է>>: Այո պատասխանի դեպքում՝ երրորդը ճշտախոս է, ոչ-ի դեպքում՝ երկրորդը: **18.** Աննան՝ երգի, Բելան պարի, Գոհարը թատրոնի: **19.** Արամը: **20.** 1. Դավիթ 2. Արմեն 3. Գևորգ 4. Բագրատ: **21.** Արարատ-Շիրակ 1:2 **22.** Սև մերսեդեսով: **23.** Ֆիզիկա՝ 6, կենսաբանություն՝ 7, մաթեմատիկա՝ 8 , քիմիա՝ 9: **24.** 1.Բենիկ 2.Երվանդ 3.Արա 4.Գևորգ 5.Դավիթ: **25.** 1.Անի 2.Եվա 3.Էլեն: **26.** Առաջինի և երրորդի հետ՝ անգլերեն, երկրորդի՝ հետ ռուսերեն: **27.** 8412 կամ 8421 **28.** Եվա, Արամ, Սոնա, Մերի, Դավիթ: **29.** Գրիչը՝ սեղանին, մատիտը՝ սեղանի տակ, քանոնը՝ պայուսակում, ռետինը՝ գրպանում: **30.** 5: Օրինակ՝ քարտերը դրված են 10, 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5 կարգով:

Թեմա 5

2. ք) Ո՛չ գ) 5 **4.** Ցուցում. ա) Գրե՛լ հնարավոր տարբերակները: Առաջին հարցի օրինակ. <<Մտապահած թվերի գումարը մե՞ծ է 15-ից>> բ) Առաջին հարցի օրինակ. <<Այդ թվերի գումարը մեծ է 30-ից>>: **5.** Ցուցում. Գրե՛լ հնարավոր տարբերակները և կիրառել կիսման մեթոդը: **6.** Այո՛, օրինակ՝ $a=2$, $b=3$ դեպքում: **7.** Այո՛, օրինակ $a=6$, $b=28$, $c=105$ դեպքում: **8.** Ցուցում: 3 հարցով գտնել հորիզոնական տողը և 3 հարցով ուղղաձիգ սյունը: **9.** Ցուցում. 4 հարցով գտնել ամիսը, 5 հարցով՝ ամսաթիվը: **10.** Ցուցում. 7 հարցով գտնել այն էջը, որում գտնվում է բառը, 6 հարցով՝ բառի դիրքը էջում: **11.** 12 **12.** Հարցի օրինակ. <<1-երով կազմված թիվը բաժանվո՞ւմ է մտապահած թվին>>: Եթե պատասխանեց այո՝ թիվը 1-ն է, եթե՝ ոչ՝ 2-ը, իսկ եթե՝ չգիտեմ՝ 3-ը: **13.** 1, 2, 4, ..., 128 **15.** Ցուցում. Առաջին կշռումով մի նժարին

դնել {1, 2}, մյուսին՝ {3,5} մետաղադրամները (5-ը իսկական մետաղադրամն է), երկրորդ կշռում՝ {1,4} և {2,5}: **17.** **2** **18.-19.** Յուցում. Յուրաքանչյուր նժարին դնել 3-ական մետաղադրամ: **20.** Յուցում. Յուրաքանչյուր նժարին դնել 14-ից ոչ պակաս մետաղադրամ: **21.** Այո՝ **22.** Յուցում. Կասկածվող մետաղադրամների քանակը 2 կշռումից հետո փոքր չէ $\frac{10}{3^2} > 1$: **23.** Յուցում. Նժարներին դնել 9-ական մետաղադրամ: **24.** 81 **25.** Յուցում. Առաջին կշռում՝ նժարներին դնել 2-ական 100 դրամանոց և 1-ական 200 դրամանոց: **26.- 28.** Յուցում. Առաջին կշռում՝ նժարներին դնել 3-ական մետաղադրամ: **29.** Յուցում. Մետաղադրամները դասավորել զույգերով՝ յուրաքանչյուրում՝ նույն արժողության (մեկ մետաղադրամ կմնա առանց զույգի): Ընտրել որևէ 9 զույգ, և յուրաքանչյուր զույգի մետաղադրամները դնել տարբեր նժարների վրա: Արդյունքում կունենանք 9 կասկածվող մետաղադրամ: **31.** Յուցում: Խնդիրը ունի պատասխանի 20 տարբերակ (կշռաքարից յուրաքանչյուրը թեթև է, կամ ծանր): Որպեսզի առաջին կշռումից հետո մնա 9-ից ոչ ավելի պատասխանի տարբերակ, կշեռքին պետք է լինի 9-ից ոչ ավելի, իսկ կշեռքից դուրս 4-ից ոչ ավելի կշռաքար: Առաջին կշռման օրինակ. մի նժարին՝ 2, 3, 4, 6 մյուսին՝ 7, 8 կշռաքարերը: **32.** Այո՝, հնարավոր է **33.** Լուծումը տրված է տեսական մասում: **34.** Յուցում: Լուծել ինչպես Սալադինի խնդիրը: Մետաղադրամներից մեկը (13-րդ) չի մասնակցում կշռումներին: Այլ կերպ ասած աղյուսակում ավելանում է =, =, =, 13 սյունը: **35.** Յուցում: Խնդրի պատասխանի տարբերակների քանակը 26 է: Հետևաբար այն լուծելի է: Կատարել Սալադինի խնդրում բերված կշռումները՝ ձախ նժարին ավելացնելով 13-րդ, իսկ աջ նժարին 14-րդ (իսկական) մետաղադրամը: Աղյուսակում ավելանում են՝

<, <, <, 13 և >, >, > 14 սյունները: **36.** Ցուցում: Լուծել ինչպես նախորդ խնդիրը, հեռացնելով կասկածելի մետաղադրամներից մեկը: Աղյուսակում ավելանում են <, <, <, 13, =, =, =, 14 և >, >, > 15 սյունները: **37.** Ցուցում: Պարկերը համարակալել և նժարին դնել առաջին պարկից՝ 1, երկրորդից՝ 2, ..., տասներորդից՝ 10 մետաղադրամ: **38.** Ցուցում: Պարկերը համարակալել և նժարին դնել առաջին պարկից՝ 1, երկրորդից՝ 2, երրորդից՝ 4, չորրորդից՝ 8, ..., յոթերորդից՝ 64 մետաղադրամ: **39.** Ցուցում: Գնդիկները համարակալել և կատարելով {1,2} և {1,3} կշռումները, որոշել յուրաքանչյուրի կշիռը: **40.** Ցուցում: Նկատել, որ եթե առաջին պարկից վերցրել են a մետաղադրամ, երկրորդից՝ b , երրորդից՝ c , ապա $|a-b|$, $|b-c|$, $|a-c|$ թվերը պետք է լինեն իրարից տարբեր: Օրինակ. Առաջին պարկից վերցնել 1, երկրորդից՝ 2, երրորդից՝ 6 մետաղադրամ:

Թեմա 6

10. Իրո՞ք՝ $a = 3n$ դեպքում $a^2 + 15a = 9(n^2 + 5n)$ **11.** Եթե $a = 7n$ և $b = 14m$, ապա $a \cdot 10^k + b = 14(5 \cdot 10^{k-1} \cdot a + m)$ **15.** Նկատենք, որ a -ն հավասար է 7-ի բաժանվող $7a$ և $2 \cdot 3a$ տարբերությանը: **17.** Նկատենք, եթե a -ն բաժանվում է 4-ի (6-ի), ապա $3a$ -ն ($2a$ -ն) կբաժանվի 12-ի: Հետևաբար դրանց տարբերությունը նույնպես կբաժանվի 12-ի: **19.** Ցուցում. Օգտվել $2a + b = 4(5a - 2b) - 9(2a - b)$ նույնությունից: **20.** Ցուցում. Օգտվել $11a + 5b = 6(4a + 3b) - 13(a + b)$ նույնությունից: **22.** Ցուցում. Ցույց տալ, որ $\overline{abc} - 2(a - 2b + 4c)$ տարբերությունը բաժանվում է 7-ի: **23.** Ցուցում. Ցույց տալ, որ $\overline{abcd} + 8(27d - 9c + 3b - a)$ գումարը բաժանվում է 31-ի: **25.** Ցուցում. Ցույց տալ, որ $(ab - cd) + (bc - ad)$ գումարը բաժանվում է $(a + c)$ -ի:

Թեմա 7

1. ա) 2457 բ) 4572 գ) 2475 դ) 4752 2. ա) 6531 բ) 5316 գ) 6315
դ) 5136 3. ա) 1 բ) 8 5. ե) 0 գ) 5 ժա) 4 ժբ) 0 ժե) 4 ժը) 6
14. ա) 11100 բ) 1110 գ) $\underbrace{11 \dots 1}_{9 \text{ հաս}} 00$ 15. ա) 1 և 5 կամ 6 և 0 բ) 4 և 2
16. ա) 42336 բ) 6120 կամ 6525 17. 2 18. 85239 կամ 95238
19. ա) 7812 բ) 67815 20. 134568 21. 9 23. 99 24. 378
27. Չախից՝ 4, աջից՝ 6 28. 7 29. 1042536 և 6451302 30. 9

Թեմա 8

1. ա) 109 բ) $bp+r$ 2. ա) $4n+3$ կամ $4n-1$ բ) $9n+5$ կամ $9n-4$ 3. ա) 43
բ) 42 գ) 257 4. ա) 0, բ) 1 կամ 4 գ) 1 5. 4 6. Քանորդը չի փոխվի,
մնացորդը կմեծանա 3 անգամ: 7. 0, 3, 6, 9 8. 7, 16, 25 9. Երեքն
էլ՝ կարող են: 10. ա) $m-r$ բ) r գ) 0 11. Ո՛չ 12. 67 13. 1 14. ա) 2 բ) 8
15. ա) 34 բ) 33 16. 211 17. 59 18. 17 19. 13 20. 11 23. 1 24. Ո՛չ:
Ցուցում. Ստացված թվերը չեն բաժանվում 3-ի: 27. ա) 0, 1 բ) 0, 1
գ) 0, 1, 4 28. 0, 1, 4, 5, 6, 9 29. գ) Ո՛չ: Ցուցում. Թվի քառակուսին 8-ի
բաժանելիս մնացորդում 5 չի կարող ստացվել: 30. ա) 1 բ) 3 գ) 4
32. Ցույց տալ, որ այն բաժանվում է 3-ի: 34. ա) 3 բ) 3 35. 72

Թեմա 9

1. 40 2. ա) 20 կամ 44 բ) 48, n -ը պետք է լինի պարզ թիվ: 4. 97 և
101 6. 1 7. ա) 2 բ) 0 գ) 0 9. ա) 3 բ) 4 10. 11 12. Օրինակ՝ 6, 10, 15
13. 31 14. Պարզ են՝ բ) , ե), է) –ն 15. Ո՛չ 16. Ո՛չ 17. Ցուցում.
Թվերից մեկը կբաժանվի 3-ի: 18. 2 և 5 21. ա) 3 բ) 3 22. 3
23. ա) Այո՝ $P=53$ բ) Ո՛չ 24. 5 28. 49 29. Ո՛չ 30. 1 (2-ից մինչև 11

թվերը) **31.** $11! + 2, \dots 11! + 11$ **32.** Այո: **33.** Օրինակ. 33, 34, 35 **35.** 5, 11, 17, 23, 29: Ո՛չ: Ցուցում. Թվերից մեկը պետք է բաժանվի 5-ի:

Թեմա 10

2. ա) կենտ բ) գույգ **3.** Ո՛չ: Ցուցում. Արդյունքը պետք է լինի գույգ թիվ: **4.** 4 թվի դեպքում՝ ո՛չ, 5 թվի դեպքում՝ այո: **5.** Ո՛չ: Ցուցում. Հատապտուղների ընդհանուր քանակը կլինի գույգ թիվ: **6.** Զույգ **7.** ա) կենտ բ) Ո՛չ: Ցուցում. Եթե որևէ $\langle\langle + \rangle\rangle$ նշան փոխարինենք $\langle\langle - \rangle\rangle$ -ով, ապա գումարը կփոքրանա գույգ թվով: **8.** Ո՛չ **9.** 14-ի դեպքում՝ ո՛չ, 12-ի դեպքում՝ այո: **10.** Ցուցում. Եթե կենտ թվերի քանակը կենտ է՝ ջնջել կենտ թվերից մեկը, հակառակ դեպքում ջնջել գույգ թիվ: 100 թվի դեպքում պնդումը ճիշտ չէ: (Օրինակ՝ եթե լինի 100 կենտ թիվ): **11.** Ցուցում. -1 և 1 թվերի քանակները չեն կարող լինել հավասար: **12.** Հնարավոր չէ: Ցուցում. Բոլոր թվերի գումարը կենտ է, իսկ յուրաքանչյուր խմբի թվերի գումարը գույգ: **13.** Ո՛չ: Ցուցում. Բոլոր թվերի գումարի գույգությունը չի փոխվում: **14.** Ո՛չ: Ցուցում. Մետաղադրամների քանակի գույգությունը չի փոխվում: **15.** Ցուցում. Որևէ քարտի վրա գրված թվերը կլինեն կենտ: **16.** Ցուցում. Բոլոր տողերում գրված թվերի արտադրյալը հավասար է բոլոր սյուններում գրված թվերի արտադրյալին: **17.** Ո՛չ: Կենտ թվերը միշտ կլինեն կենտ տեղերում: **18.** Բանա՛ն: Ցուցում. Բանանի քանակը միշտ կենտ է: **19.** Ո՛չ: Ցուցում. Սև և սպիտակ դաշտերի քանակները տարբեր են: **20.** Ցուցում. Կատարել հակասող ենթադրություն:

Թեմա 11

8. ա) $\frac{5}{9}$ բ) $\frac{2}{3}$ գ) $\frac{13}{99}$ դ) $5\frac{3}{11}$ ե) $2\frac{5}{27}$ զ) $1\frac{25}{101}$ **9.** ա) $\frac{69}{110}$ բ) $\frac{71}{300}$ գ) $1\frac{19}{74}$
դ) $3\frac{569}{1100}$ ե) $2\frac{81}{1850}$ **10.** 0, (615384) **11.** Միավ ե՝ գ)-ն **18.** ա) 3
բ) 1 գ) 1 դ) 5 **19.** ա) 67 բ) 51 գ) 67 դ) 58 **21.** ա) 3,(3) բ) 8,(5)
գ) 9,(74) դ) 3,(53) ե) 3,(07) զ) 7,(547) **23.** ա) $10\frac{1}{9}$ բ) $2\frac{7}{90}$ գ) $4\frac{23}{99}$
դ) 4 **24.** Միավ ե՝ գ)-ն **25.** ա) 2 բ) 3 գ) 1 դ) 18 **26.** ա) 5 բ) 7
գ) 6 դ) 8 **27.** 0,(8) **28.** $\frac{7}{9}$ **29.** ա) 1000 բ) 648 **30.** $b < a = d < c$

Թեմա 12

2. Ցուցում. Եթե յուրաքանչյուր դասարանը (9 դաս.) ունենա 1 կամ 2 գերազանցիկ, ապա դպրոցը կունենա 18-ից ո՛չ ավելի գերազանցիկ: **3.** Ցուցում. 80 տարին ունի 29220 օր: **4.** Ցուցում. Եթե յուրաքանչյուր ծառատեսակից լինի 11-ից ոչ ավելի, ապա այգում կլինի 44-ից ո՛չ ավելի ծառ: **5.** Այո **6.** ա) 13 բ) 26 գ) 24 դ) 20 **7.** Ցուցում. Ցանկացած երեք թվերից երկուսը նույն գույգուրյան են: **8.** Ցուցում. Դիտարկել թվերը 3-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդների հնարավոր տարբերակները: Եթե բոլոր մնացորդները հավասար են 1, ապա ցանկացած երկու թվերի գումարը չի բաժանվի 3-ի: **10.** Ցուցում. Թիվը 7-ի բաժանելիս կարող են ստացվել 7 տարբեր մնացորդներ՝ 0, 1, 2, ... 6 **11.** Ցուցում. 11-ի բաժանվող երկնիշ թվի թվանշանները նույն են: **12.** Ցուցում. Կիրառել 9-ի բաժանելիության հայտանիշը: **13.** Ցուցում. Կենտ թիվը 10-ի բաժանելիս կարող է ստացվել 1, 3, 5, 7, 9 մնացորդներ: **14.** Ցուցում. Որոշել 3-ի բազմապատիկ թիվը 21-ի բաժանելիս ստացող մնացորդները, կամ ընտրել երկու թիվ, որոնց տարբերությունը բաժանվի 7-ի: **15.-17.** Ցուցում. Տե՛ս

տեսական մասի խնդիր 4-ը: **18.** Ցուցում. ա) և բ). Եթե ձկնորսներից յուրաքանչյուրը բռնել է 3-ից ոչ ավելի (4-ից ոչ պակաս) ձուկ, ապա ձկների քանակը կլինի ոչ ավելի, քան $8 \cdot 3 = 24$ -ը (ոչ պակաս, քան $8 \cdot 4 = 32$ -ը) գ) եթե բոլորը բռնեցին տարբեր քանակի ձկներ, ապա ձկների ընդհանուր քանակը կլինի ոչ պակաս, քան $0 + 1 + 2 + \dots + 7 = 28$ -ը: **20.** Ցուցում. Նշված գումարները -8 -ից մինչև $+8$ թվերից մեկն է: Դրանց թիվը փոքր է աղյուսակի տողերի, սյուների և անկյունագծերի ընդհանուր քանակից: **21.** Ցուցում. Հարթության որևէ կետից տանել այդ ուղիղներին զուգահեռ ուղիղներ: **22-23.** Ցուցում. Քառակուսին տրոհել միավոր կողմով քառակուսիների: **24.** Ցուցում. Դիտարկել նույն գույնով ներկված աղեղների համաչափ աղեղը՝ շրջանագծի կենտրոնի նկատմամբ: **25.** Ցուցում. Ցուրաքանչյուրը կարող է ունենալ 0-ից մինչև 9-ը ծանոթ, բայց 0 և 9 ծանոթներ միաժամանակ չեն կարող լինել: **26.** Ցուցում. Միաժամանակ 0 և 13 հանդիպումներով թիվեր չեն կարող լինել: **27.** Ցուցում. Միաժամանակ 0 և 7 թվով միացումներով կետեր չեն կարող լինել: **28.** Ցուցում. Եթե նույն գույնի 7-ից ավելի խորանարդիկ չլինի, ապա գույների քանակը կլինի 7-ից շատ: **29.** Ցուցում. բ) Դիտարկել հետևյալ 100 թվերը՝ $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$, որտեղ $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ տրված թվերն են: **30.** Ցուցում. Թիվը 17-ի բաժանելիս հնարավոր մնացորդները տրոհել խմբերի. $\{0\} \{1; 16\} \{2; 15\} \dots \{8; 9\}$: **31.** Ցուցում. Թիվը 100-ի բաժանելիս հնարավոր մնացորդները տրոհել խմբերի. $\{0\} \{1; 99\} \{2; 98\} \dots \{49; 51\} \{50\}$: **32.** Ցուցում. 16-ից փոքր թվերը տրոհել $\{1; 2; 3\}, \{4; 5; 6\}, \dots, \{13; 14; 15\}$ խմբերի: **33-34.** Ցուցում. Տե՛ս տեսական մասի խնդիր 4-ը: **35.** Ցուցում. Թվերը ներկայացնել $2^n(2m + 1)$ տեսքով: Օրինակ՝ $28 = 2^2 \cdot 7$:

Թեմա 13

1. ա) 2, 3 բ) 3, 5 գ) 2, 3, 7 դ) 43 2. ա) 18, 36, 54, 72, 90 բ) 11, 22,...99 5. ա) $U_{j n'}$ բ) Ω'_{Σ} 6. ա) 986521 բ) 13789 7. ա) 24 բ) 1 գ) 77 դ) 12 8. 23 9. ա) 1120 բ) 378 գ) 1386 դ) 4760 10. 40 13. գ) 12n 14. ա) 66 բ) 13 գ) 8 15. 105, 210, 315, 420 16. 120 17. ա) 23 բ) 41 գ) 47 դ) 131 19. Ω'_{Σ} 20. ա) (5; 10) բ) (3; 7) լ) (1; 21) գ) $\emptyset$ դ) (4; 56), (8; 28) 22. ա) 6 լ) 30 բ) 6 լ) 66 կամ 30 լ) 42 23. Ω'_{Σ} 26. 2 29. ա) 196 լ) 5880 բ) 34 լ) 131784 31. ա) 23 բ) 107 գ) 43 դ) 131 32. ա) 11, $\frac{23}{31}$ բ) 13, $\frac{17}{23}$ գ) 43, $\frac{12}{35}$ դ) 257, $\frac{16}{33}$ 34. ա) 10 բ) 15 35. ա) 1, 2, 3, 7 բ) 1, 3, 6, 21 38. ա) 36 բ) 675 39. ա) 48 բ) 63 40. ա) $2^{10} - 1$ բ) $\underbrace{11 \dots 1}_{10}$

Թեմա 14

3. ա) (1; 9) (-1; -13) (11; -1) (-11; -3) բ) (2; 3) (4; -23) (-10; -9) (16; -11) 4. ա) (9; 8) բ) (9; 8) (-9; -8) (9; -8) (-9; 8) 5. ա) (5; 3) բ) (5; 9) 7. ա) (3; 7) (-9; 7) (3; -7) (-9; -7) բ) (3; 3) (3; -3) (-4; 3) (-4; -3) 8. ա) (0; 5) բ) (1; 2) 10. ա) (1; 39) (7; 1) բ) (53; 79) 11. ա) (3; 1) (1; 1) (-1; -1) (-3; -1) բ) (1; 1) (1; 3) (-1; -1) (-1; -3) 13. ա) (1; -4) (-1; 3) (8; 3) (-8; -4) բ) (-5; 1) (9; -1) (49; 7) (51; -7) 14. ա) (-1; 2) (-3; 4) բ) (-1; 5) (-2; 3) 15. ա) (0; 0) (6; -6) (8; 8) (14; 2) բ) (22; 1) (0; 0) (12; 6) (10; -5) 16. ա) (1; 0) (-1; 0) բ) (6; 1) (-6; -1) 17. ա) (1; -2) (1; 4) (-3; 0) (-3; -6) բ) (0; 3) (0; -3) (8; -1) (-2; -7) 18. ա) (1; 8) (3; 24) բ) (0; 2) (2; 8) (-2; -12) (-4; -18) 19. ա) (2+7n; 3+11n) բ) (8+27n; 5+17n) գ) (2+5n; -5-13n) դ) (-2+19n; 5-47n) 20. ա) (4+11n; 3+9n) բ) (-6+13n; 4+8n) գ) (-4+6n; 4+5n) դ) (6+17n; 2+6n) 21. ա) (-18+35n; -63+122n)

ք) $(-517+147n; 88+25n)$ զ) $(-11+51n; -38+175n)$ ղ) $(125+235n; -34+64n)$ **22.** 25:Ցուցում. հավասարման լուծումն է $x=53n-20$, $y=119n-45$, հետևաբար $|x-y|=|25-66n|$ **23.** Ցուցում. Գտնել $7x-9y=1$ հավասարման բնական լուծումը՝ (4; 3) **24.** Ցուցում. Գտնել $8x-11y=7$ հավասարման բնական լուծումը՝ (5; 3) **25.** Հնարավոր է: Ցուցում. Գտնել $750x+400y=8600$ հավասարման բնական լուծումը՝ (4; 14) **26.** 16: Ցուցում. $35x+75y=1000$ հավասարման բնական լուծումներից ընտրել այն, որի դեպքում $|x+y|$ փոքրագույնն է: **27.** 65 ձու՝ 40 փոքր և 25 մեծ: **28.** Տղամարդ՝ 5, կին՝ 1, երեխա 6: **29.** Աքլոր՝ 2, հավ՝ 26, ճուտ՝ 72: Ցուցում. Լուծել հավասարումը՝ $10x+6y+1/3(100-x-y)=200$: **30.** ա) Ո՛չ ք) Այո՝ ձախ՝ 7 ցատկ, աջ՝ 6 զ) Այո՝ ձախ՝ 8 ցատկ, աջ՝ 7:

Լրացուցիչ վարժություններ և խնդիրներ

1. Զույգ են՝ ա) և ք)-ն **2.** ա)-ն, ք)-ն, զ)-ն **3.** ա) 1 ք) 5 զ) 6 ղ) 6 է) 9 զ) 1 **4.** ա) 9 ք) 11 զ) 3 ղ) 4 է) 18 զ) 32 **5.** ա) 1000000 ք) 5000000 **6.** ա) 2 ք) 7 զ) 7 ղ) 2 է) 3 զ) 4 **7.** ա) 6 ք) 6 զ) 9 **8.** ա) 3 ք) 6 զ) 3 ղ) 9 է) 0 **12.** ա) 20-ից փոքր գույգ թվերը ք) 3, 7, 11, 15, 19 զ) 2, 6, 10, 14, 18 **14.** ա) 6 ք) 12 զ) 18 ղ) 48 **15.** ա) $2^7 \cdot 3^{11}$, $7 \cdot 2^{10} \cdot 3^{12} \cdot 5$ ք) 7^{14} , $7^{24} + 7^{18}$ զ) 3^{42} , $2 \cdot 3^{43}$ ղ) 20, $2^{13} \cdot 5^{18}$ է) $2^9 \cdot 3^8$, $2^{16} \cdot 3^{18}$ զ) $2^{13}, 2^{18} \cdot 3^{13}$ **17.** ա) 320 ք) $3 \cdot 5^7$ զ) $\frac{1}{3^8 \cdot 2}$ ղ) $\frac{1}{2^7 \cdot 7^3}$ է) $\frac{3^6}{5^6}$ **18.** ա) 3 ք) 20 զ) 200 ղ) 198 **19.** ա) 4 ք) 81 զ) 5^{19} **20.** 8 **21.** ա) 8 ք) 40 զ) 14 ղ) 17 **23.** ա) Ցուցում. Օգտվել $3^5 < 2^8$ և $2^{11} < 3^7$ անհավասարություններից: **25.** 12, Ցուցում. Ցույց տալ, որ $5 \cdot 10^{11} < 2^{39} < 10^{12}$ **26.** ա) 1 ք) 3 **27.** ա) 3 ք) 2 **31.** ա) 400 ք) 28 զ) 168 **33.** ա) 25, Ցուցում. Ներկայացնել $x^4(x-17) - x^2(x^2 - 289) + x(x-17) + x + 8$ տեսքով: ք) -7 **34.** ա) 10 ք) 1090 **39.** 27 **40.** ա) 0,55 ք) 0,99 **44.** ա) 18 ք) 11 **45.** 9 **52.** Ցուցում. $n=3k+1$

53. $(a^2 - b^2)$ քաժ. $(a+b)$ 54. 1 55. ա) 6,41 ք) 15,689 գ) 39,0881
56. ա) $\frac{97}{36}$ ք) $\frac{665}{216}$ գ) $\frac{6817}{1296}$ 57. $\frac{13}{36}$ 58. ա) (10; 4) ք) (8; 6) 60. ա) (3; 4)
ք) (1,5; 0,5) 61. ա) (3; 3) (4; 2) ք) (6; 4) (8; 6) 62. ա) 12 ք) 11 գ) 1, 6,
9 64. ա) $(x+5)(x-3)$ ք) $(x-2)(x-8)$ գ) $(x-4)(x+5)$ դ) $(x+1)(3x+1)$
65. ա) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ ք) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 5)$
գ) $(x^2 - 3x - 3)(x^2 + 3x - 3)$ դ) $3(2x^2 - 1)(4x^2 - 3)$
66. ա) $(2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1)$ ք) $(a^2 + 6a + 18)(a^2 - 6a + 18)$
գ) $(x^4 + 2x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 2)$ դ) $(x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ 67. ա) $(a - 2)(a^2 + 3a + 6)$ ք) $(a + 2)(a^2 - a + 2)$
գ) $(a - 1)(a - 2)(a + 3)$ դ) $(a - 1)(a^2 + 3a + 3)$
73. ա) $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$ ք) $(a + b + ab - 1)(a + b - ab + 1)$
գ) $(a + b - 2c)(a + b + 4c)$ 74. 20 75. 40% 76. 30%
77. 713713 82. 13 83. ա) 7 ք) 76 գ) 86 84. 71 85. 56 86. ա) $U_{jn}^{\wedge}$
2500 ք) Ω_{Σ} 87. 8, 16, 24, 32, 40, 48 88. 72 89. 192 90. 97 91. 1024
92. 729 93. 7 94. ա) Ω_{Σ} ք) U_{jn} , օրինակ՝ 16 95. Ω_{Σ} 97. $\frac{11 \dots 1}{30 \text{ հաս}}$
98. U_{jn} , օրինակ՝ 60, 90, 150 99. 736842105263157894

Բովանդակություն

Նախաբան	3
Թեմա 1. Տոկոսով խնդիրներ	5
Թեմա 2. Համատեղ աշխատանք	11
Թեմա 3. Բնական թվի դիրքային գրությունը	16
Թեմա 4. Տրամաբանական խնդիրներ	22
Թեմա 5. Կշռում	36
Թեմա 6. Բաժանելիության հատկություններ	52
Թեմա 7. Բաժանելիության հայտանիշներ	57
Թեմա 8. Մնացորդով բաժանում	67
Թեմա 9. Պարզ թվեր	74
Թեմա 10. Զույգություն	83
Թեմա 11. Պարբերական տասնորդական կոտորակ	89
Թեմա 12. Դիրքիսկզբի սկզբունքը	102
Թեմա 13. Բաժանարար և բազմապատիկ: Էվկլիդեսի սկզբունքը	112
Թեմա 14. Դիոֆանտյան հավասարում	120
Լրացուցիչ վարժություններ և խնդիրներ	130
Պատասխաններ և ցուցումներ	140

ՆԻԿԻՏԱ ԲՈԳԴԱՆԻ ՊՈԴՈՍՅԱՆ

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

7-րդ դասարան

Խմբագիր՝ Ռոբերտ Հովսեփյան

Կազմի ձևավորումը՝ Գևորգ Շառոյանի

Համակարգչային ձևավորումը՝ Հրայր Շառոյանի

Համակարգչային շարվածքը՝ Կարինե Մինասյանի

Ստորագրված է տպագրության 04.04.2017:

Չափսը՝ 60x84 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ:

Տպագրությունը՝ օֆսեթ: Տպաքանակը՝ 200 օրինակ:

«ԳԵՎՈՐԳ - ԶՐԱՅՐ» ՍՊԸ



Հրատարակչություն

Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6:

Հեռ.՝ 52.79.74

Էլ. փոստ՝ lusakn@rambler.ru

