Կորյուն Առաքելյան
Հայկազն Նավասարդյան
Արման Սարգսյան

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

12-րդ դասարան

Երևան 2016

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻՆ ԱՌԸՆԹԵՐ ԱՐՏԱՇԵՍ ՇԱՀԻՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒԿ ԴՊՐՈՑ

Ձեռնարկը համապատասխանեցված է ԿԳ նախարարության կողմից հաստատված մաթեմատիկայի մասնագիտացման ուղղվածության ծրագրին

Նախաբան

Մաթեմատիկական կրթությունը և մաթեմատիկական մտածելակերպն անհրաժեշտ են ոչ միայն նրանց, ովքեր հետագայում կզբաղվեն մաթեմատիկայով կամ գիտական որևէ հետազոտությամբ, այլ նաև բոլոր նրանց, ովքեր կաշխատեն ժողովրդական տնտեսության տարբեր բնագավառներում:

Կրթության գործընթացում մաթեմատիկական խնդիրներն ունեն ուսուցողական, գործնական և դաստիարակչական նշանակություն: Նրանք զարգացնում են սովորողների ալգորիթմական, տրամաբանական մտածողությունը, մշակում մաթեմատիկան կիրառելու գործնական հմտություններ, ձևավորում աշխարհայացք: Խնդիրների լուծումը նրանց մղում է ստեղծագործական աշխատանքի:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերում զետեղված խնդիրները, որպես կանոն, նպատակաուղղված են տվյալ թեմայի տեսական նյութի յուրացմանը: Սահմանափակվելով միայն դասագրքում ընդգրկված խնդիրներով՝ սովորողների մոտ կարող են ձևավորվել միայն սերտողական բնույթի գիտելիքներ: Միօրինակ կամ միայն ալգորիթմական խնդիրները չեն կարող ապահովել սովորողների մտավոր զարգացմանը ներկայացվող պահանջներին:

Մաթեմատիկայի նկատմամբ հակումներ ունեցող սովորողները չեն բավարարվում մաթեմատիկայի դասերին ստացած գիտելիքներով, հետևաբար և ցանկություն է առաջանում ավելի շատ տեղեկություն ստանալ իրենց սիրած առարկայի մասին, իմանալ, թե ինչպես է այն կիրառվում կյանքում, լուծել հետաքրքիր և ավելի բարդ խնդիրներ:

Սույն ձեռնարկում ընդգրկված նյութերը կարող են նպաստել մաթեմատիկական գիտելիքների ընդլայնմանը, ծրագրային նյութը խորությամբ յուրացնելուն, տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, հետազոտական ունակությունների ձևավորմանը, ինչպես նաև՝ մաթեմատիկական խոսքի կուլտուրայի զարգացմանը:

Գիրքը նախատեսված է մասնագիտացված դպրոցների, բնագիտամաթեմատիկական թեքումով 12-րդ դասարանի սովորողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցիչներին՝ արտադասարանական պարապմունքներ անցկացնելու, ինչպես նաև աշակերտներին՝ մաթեմատիկական օլիմպիադաներին նախապատրաստվելու համար:

§ 1. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ
ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ
ՀԱՄԱՍԵՌ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

x_1, x_2, ..., x_k փոփոխականների նկատմամբ **բազմանդամ (ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիա)** է կոչվում $ax_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$ տեսքի արտահայտությունների (միանդամների) գումար, որտեղ յուրաքանչյուր n_i $(i = 1, 2, ..., k)$ ոչբացասական ամբողջ թիվ է:

Այլ կերպ՝ բազմանդամ են անվանում միանդամների գումարը: Միանդամի **աստիճան** են անվանում նրանում մասնակցող բոլոր փոփոխականների աստիճանացույցերի գումարը: Բազմանդամի **աստիճան** անվանում են բազմանդամը կազմող միանդամների աստիճաններից ամենամեծը (ենթադրվում է, որ բազմանդամի գումարելիների մեջ չկան նման անդամներ):

Օրինակ 1: ա) x և y փոփոխականների նկատմամբ

$$5x^3y^3 - 7x^3y^6 - 4x^2y^8 + 2y^7 - 13$$

բազմանդամի աստիճանը 10-ն է (երրորդ գումարելիի՝ $-4x^2y^8$ միանդամի մեջ x և y փոփոխականների ցուցիչների գումարը հավասար է 10-ի):

բ) x, y, z փոփոխականների նկատմամբ

$$3x^6 - x^4y^4 + 6y^3z^2 + 2x^3y^2z^3 - x^2yz^4 + 5$$

բազմանդամի աստիճանը 8-ն է (երկրորդ և չորրորդ գումարելիներից յուրաքանչյուրի մոտ փոփոխականների ցուցիչների գումարը հավասար է 8-ի):

գ) x և y փոփոխականների նկատմամբ

$$x^5 - x^3y + a^3x^2y^3 - 3y^4 + 2b^8 - 4$$

բազմանդամի աստիճանը հավասար է 5-ի (այստեղ a-ն և b-ն տրված թվեր են՝ հաստատուններ):[1]

---

[1] *Ուշադրություն դարձրեք՝ օրինակում շեշտված է, որ բազմանդամի մեջ միայն* x *և* y *-ն են փոփոխականներ:*

$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k$ փոփոխականներով արտահայտությունը (մասնավորաբար, բազմանդամը) նշանակում են՝

$P(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k)$, $F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k)$, $G(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k)$ և այլն:

Բազմանդամն անվանում են **համասեռ,** եթե նրա բոլոր անդամներն (գումարելիները) ունեն միևնույն աստիճանը: Այլ կերպ՝ $P(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k)$ բազմանդամը կոչվում է համասեռ, եթե ցանկացած t թվի դեպքում

$$P(tx_1,\ tx_2,\ ...,\ tx_k) = t^n P(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k):$$

Օրինակ 2: ա) $P(x,\ y) = 2x^4 + xy^3 - 5x^2y^2 + 3xy^3 - y^4$ բազմանդամը 4-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ է, քանի որ նրա բոլոր անդամների մեջ x և y փոփոխականների ցուցիչների գումարը հավասար է 4-ի:

բ) $P(x,\ y,\ z) = xy^5 + yz^5 + zx^4 + ax^6 + by^6 + cz^6$ բազմանդամը 6-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ է (ուշադրություն դարձրեք՝ a-ն, b-ն, c-ն համարվում են հայտնի):

Երկու՝ x և y փոփոխականներով n-րդ աստիճանի բազմանդամի ընդհանուր տեսքն է՝

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n :$$

Մասնավորաբար, x և y փոփոխականներով երկրորդ աստիճանի համասեռ բազմանդամն ունի

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

տեսքը, իսկ երրորդ աստիճանի համասեռ բազմանդամը՝

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

տեսքը:

$P(x_1, x_2, ...,\ x_k)$ բազմանդամը կոչվում է **սիմետրիկ** (համաչափ), եթե $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k$ փոփոխականների արժեքների ցանկացած հավաքածուի դեպքում բազմանդամի արժեքը չի փոխվում՝ $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ թվերի ցանկացած տեղափոխությամբ:

Ընդունված է նաև այսպիսի սահմանում՝ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ բազմանդամը կոչվում է սիմետրիկ, եթե այն չի փոխվում նրանում մասնակցող փոփոխականների ցանկացած տեղափոխության դեպքում:

Սիմետրիկ բազմանդամի օրինակներ են՝

$$P(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad F(x, y) = x^5 + 4x^2y + 4xy^2 + y^5,$$

$$G(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2 - y^2 - z^2 - xyz \text{ և այլն:}$$

$x_1, x_2, ..., x_k$ փոփոխականներից կազմված **հիմնական** (պարզագույն) սիմետրիկ բազմանդամներ են անվանում հետևյալ բազմանդամները.[2]

$$P_1 = x_1 + x_2 + ... + x_k,$$

$$P_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{k-1}x_k,$$

$$P_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{k-2}x_{k-1}x_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_k = x_1x_2...x_k,$$

որտեղ P_m-ը $(m = 1, 2, ..., k)$ $x_1, x_2, ..., x_k$ տարրերից կազմված բոլոր այն արտադրյալների գումարն է, որոնցից յուրաքանչյուրն իրենից ներկայացնում է ճիշտ m բազմապատկիչ, ընդ որում՝ գումարելիներից ցանկացած երկուսը միմյանցից տարբերվում են գոնե մեկ բազմապատկիչով: Նշանակում է S_m-ը պարունակում է

$$C_k^m = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!} \text{ գումարելի}$$

Երկու՝ x և y փոփոխականներից կազմված հիմնական սիմետրիկ բազմանդամներն են՝ $x + y$, xy:

Երեք՝ x, y, z փոփոխականներից կազմված հիմնական սիմետրիկ բազմանդամներն են՝ $x + y + z$, $xy + yz + zx$, xyz:

---

[2] *Ֆունկցիաների տեսության մեջ դրանք կոչվում են* ***տարրական սիմետրիկ ֆունկցիաներ****:*

Քանի որ հետագայում հաճախ ենք առնչվելու երկու (որոշ դեպքերում՝ նաև երեք) փոփոխականով սիմետրիկ բազմանդամների հետ, ուստի հարկ ենք համարում կանգ առնել որոշ կարևոր հարցերի վրա: Առանձնապես ուշադրության են արժանի

$$S_n = x^n + y^n, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

աստիճանային գումարները, այսինքն՝ փոփոխականների n-րդ աստիճանների գումարը: Այդ գումարները հաջորդաբար կարելի է արտահայտել $u = x + y$ և $v = xy$ հիմնական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով, հիմքում ունենալով հետևյալ անդրադարձ բանաձևը՝

$$S_{n+2} = uS_{n+1} - vS_n : \qquad (1)$$

Ապացուցենք այդ: Ունենք՝

$$S_{n+2} = x^{n+2} + y^{n+2} = (x + y)\left(x^{n+1} + y^{n+1}\right) - \left(xy^{n+1} + xy^{n+1}\right) =$$
$$= (x + y)\cdot\left(x^{n+1} + y^{n+1}\right) - xy\left(x^n + y^n\right) = uS_{n+1} - vS_n :$$

S_1-ի և S_2-ի համար անմիջապես ստանում ենք՝

$$S_1 = x + y = u, \qquad S_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v :$$

Գիտենալով S_1-ը և S_2-ը, (1) բանաձևի միջոցով կգտնենք S_3-ը, այնուհետև՝ S_4-ը և այլն:

Ստորև ներկայացվում է x և y փոփոխականներից աստիճանային մի քանի գումարների արտահայտությունները՝ $u = x + y$ և $v = xy$-ի միջոցով.

$$S_3 = x^3 + y^3 = u^3 - 3uv,$$
$$S_4 = x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$
$$S_5 = x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2,$$
$$S_6 = x^6 + y^6 = u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 - 2v^3,$$
$$S_7 = x^7 + y^7 - 7u^5v + 14u^3v^2 - 7uv^3,$$
$$S_8 = x^8 + y^8 = u^8 - 8u^6v + 20u^4v^2 - 16u^2v^3 + 2v^4 :$$

Օ ր ի ն ա կ 3: Բազմանդամը ներկայացնենք հիմնական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով.

ա) $x^4y-2x^3y^2-2x^2y^3+xy^4=\left(x^4y+xy^4\right)-\left(2x^3y^2+2x^2y^3\right)=$
$=xy\left(x^3+y^3\right)-2x^2y^2(x+y)=v\left(u^3-3uv\right)-2v^2u=u^3v-3uv^2-2uv^2$:

բ) $x^4+4x^3y-5x^2y^2+xy^2+x^2y+4xy^3+y^4=\left(x^4+y^4\right)+\left(4x^3y+4xy^3\right)-$
$-5x^2y^2+\left(xy^2+x^2y\right)=\left(x^4+y^4\right)+4xy\left(x^2+y^2\right)-5(xy)^2+xy(x+y)=$
$=u^4-4u^2v+2v^2+4v\left(u^2-2v\right)-5v^2+vu=u^4+uv-11v^2$:

Անենք որոշ նկատառումներ նաև երեք՝ x, y, z փոփոխականներից կազմված $A_n=x^n+y^n+z^n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ աստիճանային գումարների վերաբերյալ:

Համառոտության համար, հիմնական սիմետրիկ բազմանդամների համար կատարենք նշանակումներ՝

$$x+y+z=\sigma,\quad xy+yz+zx=\omega,\quad xyz=w:$$

Արտածենք անդրադարձ բանաձև A_{n+2}, A_{n+1}, A_n ,σ, ω, w մեծությունների միջև, որտեղ $n\in N$: Ունենք՝

$$\begin{aligned}
&\left(x^{n+2}+y^{n+2}+z^{n+2}\right)(x+y+z)=\left(x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}\right)+\\
&+\left(x^{n+2}y+x^{n+2}z+y^{n+2}x+y^{n+2}z+z^{n+2}x+z^{n+2}y\right)=\left(x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}\right)+\\
&+\left[\left(x^{n+2}y+y^{n+2}x+z^{n+1}xy\right)+\left(y^{n+2}z+z^{n+2}x+y^{n+1}xz\right)+\left(y^{n+2}z+z^{n+2}y+x^{n+1}yz\right)-\right.\\
&\left.-\left(x^{n+1}yz+y^{n+1}xz+z^{n+1}xy\right)\right]=\left(x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}\right)+\left[xy\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right)+\right.\\
&\left.+xz\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right)+yz\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right)\right]-xyz\left(x^n+y^n+z^n\right)=\\
&=\left(x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}\right)+\left(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\right)(xy+xz+yz)-xyz\left(x^n+y^n+z^n\right):
\end{aligned}$$

Այսպիսով, վերն արված նշանակումների համաձայն կունենանք՝

$$A_{n+2}\sigma=A_{n+3}+A_{n+1}\omega-A_nw,$$

որտեղից՝

$$A_{n+3}=\sigma A_{n+2}-\omega A_{n+1}+wA_n: \qquad (2)$$

Նկատենք, որ

$$A_1 = x + y + z = \sigma,$$
$$A_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + xz) = \sigma^2 - 2\omega,$$
$$A_3 = x^3 + y^3 + z^3 = \left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z) - \left[\left(x^2y + x^2z + xyz\right) + \right.$$
$$\left. + \left(y^2x + y^2z + xyz\right) + \left(z^2x + z^2y + xyz\right) - 3xyz\right] = \left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot(x+y+z) -$$
$$-\left[x(xy + xz + yz) + y(yx + yz + xz) + z(xz + zy + xy)\right] +$$
$$+ 3xyz = \left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z) - (xy + xz + yz)(x+y+z) + 3xyz =$$
$$= \sigma A_2 - \sigma\omega + 3w = \sigma\left(\sigma^2 - 2\omega\right) - \sigma\omega + 3w = \sigma^3 - 3\sigma\omega + 3w:$$

Հիմքում ունենալով A_1, A_2 և A_3-ի արտահայտությունները, (2) բանաձևի շնորհիվ, հիմնական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով կարող ենք ներկայացնել նաև A_4-ը, A_5-ը և այլն:

Օրինակ 4: $f(x,\ y,\ z) = x^4 + y^4 + z^4$ *սիմետրիկ բազմանդամը ներկայացնենք հիմնական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով:*

Լուծում: Օգտվելով (2) բանաձևից, կարող ենք գրել՝
$$A_4 = \sigma A_3 - \omega A_2 + wA_1:$$
Վերևում ստացված արդյունքներից կունենանք՝
$$x^4 + y^4 + z^4 = \sigma\left(\sigma^3 - 3\sigma\omega + 3w\right) - \omega\left(\sigma^2 - 2\omega\right) + w\sigma = \sigma^4 - 4\sigma^2\omega + 4\sigma w + 2\omega^2:$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Բազմանդա՞մ է արդյոք տրված արտահայտությունը, որտեղ $x,\ y,\ z$-ը փոփոխականներ են, իսկ $a,\ b,\ c$-ն՝ հաստատուններ:

ա) $5x^4 - 7x^2y + 0{,}5y^4 + \sqrt{10}$, բ) $x^4y + \sqrt{y}z^4 + y^5$,

գ) $1{,}5z^4 - \dfrac{5}{a}xz^2 + \sqrt{2}z^3$, դ) $\dfrac{a}{b+c}x^2 + \dfrac{b}{a+c}y^2 + \dfrac{c}{a+b}xy$,

ե) $xy^4 + 5x^{2,5}y^2 + y^5$, զ) $\sqrt{a}x^5y + \sqrt[3]{b}xy^5 + \sqrt[4]{c}z^7 + 8$,

է) $8z^3x^4 - 4x^5z^{-3} + x^2 + y^2$:

2. Նշել բազմանդամի աստիճանը.

ա) $P(x,\ y) = 3x^7 + 5x^4y^2 - x^5y^6 + 2y^{10}$,

բ) $E(x,\ y,\ z) = x^{10} + y^2z^8 - x^2y^4z^6 + a^{20}$,

գ) $F(x,\ y) = a^4x^9 - 3b^2x^7y^3 + 5c^5y^6$,

դ) $G(x,\ y) = x^7 + y^5z^4 + x^2z^6 - 4$:

3. Հետևյալ բազմանդամներից որո՞նք են համասեռ.

ա) $f(x,\ y) = x^{20} + x^{15}y^5 + 5y^{19}x$,

բ) $g(x,\ y,\ z) = x^3 + y^3 - xyz + 8$,

գ) $F(x, y, z) = ax^4y^2z + b^2x^3y^3z + c^3xz^6$,

դ) $G(x, z) = x^8 + y^2z^8 + z^6x^2$,

ե) $H(x,\ y,\ z) = xy^3 + yz^3 + zt^3 + tx^3 - xyzt$,

զ) $\varphi(y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$:

4. Հետևյալ բազմանդամներից որո՞նք են սիմետրիկ.

ա) $F(x,\ y) = x^4 + y^4 - x^2y - y^2x$,

բ) $G(x,\ y,\ z) = x^2y + y^2z + z^2x$,

գ) $E(x,\ y,\ z) = x^{10} + x^8yz + xy^8z + xyz^8 + z^{10}$,

դ) $H(x,\ y) = 6x^7y^3 + x^{12} + y^{12} + 6x^3y^7 + 1$,

ե) $f(x,\ z) = x^3 + y^3 + z^3 + axy^2$,

զ) $g(x,\ t) = x^5 + y^3 + t^5 + xt + y - 4$:

5. Նշել x_1, x_2, x_3, x_4 փոփոխականներից կազմված հիմնական սիմետրիկ բազմանդամները:

6. Բացահայտել՝ սիմետրի՞կ է արդյոք տրված արտահայտությունը (x, y, z -ը փոփոխականներ են).

ա) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - 3xy$, բ) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$, գ) $\dfrac{x+y}{z^2}+\dfrac{y+z}{x^2}+\dfrac{z+x}{y^2}$, դ) $x+y-\sqrt{x^2+y^2}-5$,

ե) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{x^3-y^3}$, զ) $\dfrac{x^2yz+y^2xz+z^2xy}{x^2+y^2+z^2}$,

է) $\dfrac{x^3+y^2+z^3}{x^2y+y^2z+z^2x}$, ը) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{y+z}{y-z}+\dfrac{z+x}{z-x}$,

թ) $\dfrac{x}{(x-y)^2}+\dfrac{y}{(x-z)^2}+\dfrac{x}{(y-z)^2}$:

Բազմանդամն արտահայտել u-ի և v-ի միջոցով, որտեղ $u=x+y$, $v=xy$ (7-11).

7. x^2-xy+y^2 : **8.** x^3y+y^3x :

9. $x^4y-x^3y^2-x^2y^3+xy^4$: **10.** $2x^3-x^2y+3xy-xy^2+2y^3$:

11. $x^5+2x^4y-x^3y^2+3x^2y^2-5x^3y+3x^2y^2-\;7x^2y^2+2xy^4-5xy^3+y^5$:

Բազմանդամն արտահայտել հիմնական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով (12-15).

12. $P(x,\ y,\ z)=x^3yz+xy^3z+xyz^3$:

13. $F(x,\ y,\ z)=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$:

14. $G(x,\ y,\ z)=x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2$:

15. $H(x,\ y,\ z)=x^5+y^5+z^5$:

Արտահայտությունը ներկայացնել հիմնական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով (16-21).

16. $f(x,\ y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$:

17. $f(x,\ y)=\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}$:

18. $f(x,\ y)=\dfrac{2x^2-xy+2y^2}{(x-y)^2}$:

19. $f(x,\ y,\ z)=(1-x)(1-y)(1+z)$:

20. $f(x,\ y,\ z)=(x+y)(y+z)(z+x)$:

21. $f(x,\ y,\ z)=(2x-y-z)(2y-x-z)(2z-x-y)$:

22. Գտնել $x^3-6x^2-9x+1=0$ հավասարման արմատների խորանարդների գումարը:

23. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ ցանկացած բնական n-ի դեպքում x^n+y^n բազմանդամը կարելի է ներկայացնել $x+y$ և xy հիմնական սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով:

24. Ապացուցել, որ k հատ փոփոխականներից կազմված երկրորդ աստիճանի հիմնական սիմետրիկ բազմանդամն ունի $\dfrac{k(k-1)}{2}$ գումարելի (այլ կերպ՝ անհրաժեշտ է ապացուցել, որ k տարր պարունակող բազմության բոլոր այն ենթաբազմությունների քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրը բաղկացած է ճիշտ երկու տարրից, հավասար է $\dfrac{k(k-1)}{2}$):

§2. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

1. Հիմնական հասկացություններ: Համարժեք հավասարումներ և համակարգեր

Այստեղ դիտարկվելու են մեկից ավելի փոփոխականներով հավասարումներ: Շարադրանքի հարմարության նպատակով խոսելու ենք երկու փոփոխականներով հավասարումների և հավասարումների համակարգերի մասին: Բերվող փաստերը նույնությամբ վերաբերվում են ցանկացած տառերով նշանակված, ցանկացած քանակությամբ փոփոխականներով հավասարումներին և հավասարումների համակարգերին:

x և y երկու փոփոխականներով հավասարումը գրառվում է հետևյալ տեսքով՝

$$f(x;y)=g(x;y), \qquad (1)$$

որտեղ $f(x;y)$-ը և $g(x;y)$-ը x և y փոփոխականներով արտահայտություններ են[1]:

(1) **հավասարման լուծում** կոչվում է այնպիսի $(x_o;y_o)$ կարգավորված թվազույգը, որ x_0-ն x-ի և y_0-ն y-ի փոխարեն տեղադրելով այդ հավասարման մեջ, ստացվում է ճիշտ հավասարություն՝

$$f(x_o;y_o)=g(x_o;y_o):$$

Օրինակ, $(2;0)$, $(0;-4)$, $(3;5)$ և $(-3;5)$ թվազույգերը

$$x^2-y=4$$

հավասարման լուծումներ են, իսկ $(0;2)$, $(1;4)$ թվազույգերը՝ ոչ:

Լուծման սահմանումը ենթադրում է, որ փոփոխականները տրված են որոշակի կարգով: Դիտարկվող օրինակի թվազույգերում x փոփոխականը համարվում է առաջինը, իսկ y փոփոխականը՝ երկրորդը: «Թվերի զույգ» կամ «թվազույգ» ասելով, միշտ նկատի է առնվում թվերի

---

[1] *Եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն (x ; y) թվազույգերը, որոնց դեպքում ճիշտ է (1) հավասարությունը, ապա այդ հավասարությունն (առաջադրությունը) անվանում են x և y երկու փոփոխականներով (անհայտներով) հավասարում:*

կարգավորված զույգ: $(-4; 0)$ թվազույգը տարբերվում է $(0; -4)$ թվազույգից և, ի տարբերություն դրանից, (1) հավասարման լուծում չէ:

Երկու հավասարումներ կոչվում են **համարժեք**, եթե նրանք ունեն լուծումների միևնույն բազմությունը[2]:

Օրինակ, (1) հավասարումը համարժեք է

$$y = x^2 - 4$$

հավասարմանը: Այդ երկու հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումների բազմությունը $\left(a;\ a^2 - 4\right)$ տեսքի թվազույգերի բազմությունն է, որտեղ a-ն ցանկացած իրական թիվ է:

Այն փաստը, որ երկու հավասարումներ համարժեք են, գրի են առնում համարժեքության $\Leftrightarrow$ նշանի օգնությամբ (ինչպես դա արվում է մեկ փոփոխականով հավասարումների դեպքում): Օրինակ՝

$$x^2 - y = 4 \Leftrightarrow y = x^2 - 4,$$

$$f(x; y) = g(x; y) \Leftrightarrow f(x; y) - g(x; y) = 0:$$

Վերջին պնդման շնորհիվ, չխախտելով քննարկման ընդհանրությունը, կարելի է համարել, որ երկու փոփոխականներով հավասարումը գրառվում է

$$F(x; y) = 0 \qquad (2)$$

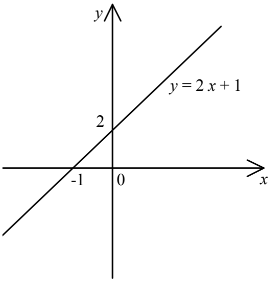
տեսքով (աջ մասը զրո է):

Մեկ փոփոխականով հավասարումների համարժեքության վերաբերյալ հատկությունները, որոնք ձեզ հայտնի են, ուժի մեջ են մնում նաև երկու և ավելի փոփոխականներով հավասարումների դեպքում:

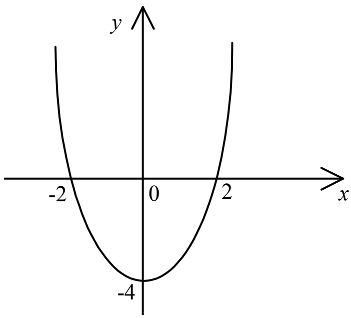
Երբեմն նպատակահարմար է (2) հավասարմանը տալ երկրաչափական մեկնաբանություն: Դիցուք՝ (2) հավասարման բոլոր $(x; y)$ լուծումները պատկերված են թվային հարթության կետերով: Այդպիսի բոլոր կետերի բազմությունն անվանում են (2) հավասարման **գրաֆիկ**: Հակադարձաբար, եթե կոորդինատային հարթության վրա տրված կորի (գծի) ցանկացած (x; y) կետի կոորդինատները բավարարում են F(x; y) = 0 հավասարմանը և այդ կորին չպատկանող և ոչ մի կետի կոորդինատներ չեն

[2] *Այդպիսի սահմանում տրվել է մեկ փոփոխականով հավասարումների համար:*

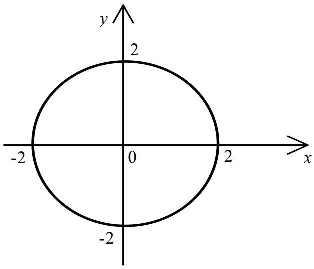
բավարարում այդ հավասարմանը, ապա ասում են, որ F($x;\ y$) = 0-ն այդ կորի **հավասարումն** է: Ընդհանուր դեպքում (2) տեսքի հավասարումներն ունեն անվերջ բազմությամբ լուծումներ, որոնք թվային հարթության վրա պատկերվում են անընդհատ (ընդհատումներ չունեցող) գծերի տեսքով: Օրինակ՝ $2x - y + 1 = 0$ հավասարման գրաֆիկը ուղիղ է (նկ. 1), $x^2 - y = 4$ հավասարման գրաֆիկը պարաբոլ է (նկ. 2), իսկ $x^2 + y^2 = 4$ հավասարման գրաֆիկը $(0;0)$ կենտրոնով և $r = 2$ շառավղով շրջանագիծն է (նկ. 3):



Նկ. 1



նկ. 2



նկ. 3

Ընդունված է ասել, որ երկու՝ x և y փոփոխականներով (անհայտներով) մի քանի հավասարումներ կազմում են **համակարգ**[3], եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն $(x;y)$ թվազույգերը, որոնցից յուրաքանչյուրը բավարարում է բոլոր այդ հավասարումներին:

Ընդունված է համակարգի մեջ մտնող հավասարումները գրել իրար տակ և միացնել ձևավոր փակագծով, այսինքն՝ այն փաստը, որ

$$F_1(x;y) = 0, \qquad F_2(x;y) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m(x;y) = 0$$

հավասարումները կազմում են համակարգ, գրառվում է այսպես՝

---

[3] *Եթե տրված են մի քանի հավասարումներ՝ $f_k(x;\ y) = g_k(x;\ y)$, որտեղ $k = 1, 2, \ldots, m$, ապա կարելի է կազմել նոր առաջադրություն՝ «Տրված բոլոր հավասարությունները ճիշտ են»: Այս առաջադրությունը կոչվում է տրված հավասարումներից կազմած հավասարումների համակարգ:*

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x;y)=0: \end{cases}$$

Երկու փոփոխականներով հավասարումների համակարգի լուծում կոչվում է այնպիսի կարգավորված թվազույգ, որը համակարգի մեջ մտնող յուրաքանչյուր հավասարման լուծում է:

Պարզ է, որ համակարգի լուծումների բազմությունը ոչ այլ ինչ է, քան համակարգի մեջ մտնող բոլոր հավասարումների լուծումների բազմությունների հատումը:

Համակարգը լուծել՝ նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ այն լուծում չունի:

Համակարգի լուծումների բազմությունը, մասնավորաբար, կարող է լինել դատարկ: Այդ դեպքում ասում են, որ համակարգը **լուծում չունի** կամ՝ **համակարգն անհամատեղ** է:

Հավասարումների երկու համակարգեր կոչվում են **համարժեք**, եթե նրանք ունեն լուծումների միևնույն բազմությունը:

Հավասարումների համակարգեր լուծելիս աշխատում են հավասարումների տրված համակարգը, որոշ ձևափոխությունների միջոցով, հաջորդաբար փոխարինել նրան համարժեք ավելի ու ավելի պարզ համակարգերով՝ մինչև ստացվի այնպիսի համակարգ, որի լուծումները հնարավոր լինի գտնել առանց դժվարության: Այդ ընթացքում օգտվում են, մասնավորապես, հետևյալ կանոններից.

1°. Փոխարինման կանոն: **Եթե համակարգում հավասարումներից մեկը փոխարինվի իրեն համարժեք հավասարումով, ապա կստացվի սկզբնականին համարժեք համակարգ:**

2°. Տեղադրման կանոն: **Եթե համակարգի հավասարումներից մեկն ունի $x=A$ տեսք (որտեղ A-ն՝ x չպարունակող կամայական արտահայտություն է), ապա, համակարգի մյուս բոլոր հավասարումներում x փոփոխականը փոխարինելով A արտահայտությամբ, կստանանք սկզբնականին համարժեք համակարգ:**

3°. *Գումարման կանոն:* **Եթե համակարգի մեջ մտնում են**

$$A = B \text{ և } C = D$$

հավասարումները (A-ն, B-ն, C-ն և D-ն՝ փոփոխականներով արտահայտություններ են), **ապա այդ հավասարումներից մեկը, օրինակ, երկրորդը, կարելի է փոխարինել**

$$A + C = B + D$$

հավասարումով: Կստացվի տրվածին համարժեք համակարգ:

Այս կանոնը բանավոր այսպես են արտահայտում.

Համակարգի ցանկացած հավասարում կարելի է փոխարինել այնպիսի հավասարումով, որն ստացվում է՝ այդ հավասարմանը գումարելով համակարգի ցանկացած ուրիշ հավասարում:

Օրինակ՝

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases} \qquad (3)$$

համակարգը համարժեք է

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

համակարգին, որտեղ երկրորդ հավասարումն ստացվել է (3) համակարգի երկրորդ հավասարումն առաջինին գումարելով:

Դիտողություն: Դիցուք, $f(x;y) = g(x;y)$ և $h(x;y) = \varphi(x;y)$ տրված համակարգի որևէ երկու հավասարումներ են: Եթե համակարգի մեջ դրանցից մեկը փոխարինենք

$$pf(x;y) + qh(x;y) = pg(x;y) + q\varphi(x;y)$$

հավասարումով, որտեղ p-ն և q-ն զրոյից տարբեր ցանկացած թվեր են, ապա ստացված համակարգը համարժեք կլինի տրվածին: Այդ պնդումը 1-ին և 3-րդ կանոնների հաջորդաբար կիրառման արդյունքն է: Այդպիսի ձևափոխությունն անվանում են **գծային ձևափոխություն**: Մասնավորաբար, ընդունելով $p = 1$, $q = -1$, գծային ձևափոխության արդյունքում կունենանք հանման կանոն.

Համակարգի ցանկացած հավասարում կարելի է փոխարինել այնպիսի հավասարումով, որն ստացվում է՝ այդ հավասարումից հանելով համակարգի ցանկացած այլ հավասարում:

Գումարման և հանման կանոնները երբեմն նշվում են մեկ անվանումով՝ **հանրահաշվական գումարման կանոն**: Հավասարումների համակարգեր լուծելիս հաճախ է կիրառվում գծային ձևափոխության օրենքը:

Ասում են, որ x և y երկու փոփոխականներով մի քանի հավասարումներ կազմում են համախումբ, եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն (x; y) թվազույգերը, որոնցից յուրաքանչյուրը տրված հավասարումներից գոնե մեկի լուծում է: Այն փաստը, որ $f_1(x;y)=g_1(x;y)$ և $f_2(x;y)=g_2(x;y)$ *հավասարումները կազմում են համախումբ, գրառվում է այսպես՝*

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_2(x;y)=g_2(x;y) \end{array}\right.$$

կամ «;» նշանի օգնությամբ՝

$$f_1(x;y)=g_1(x;y);\quad f_2(x;y)=g_2(x;y)$$

Հավասարումների համախմբի լուծումների բազմությունը, ըստ էության, համախմբի մեջ մտնող բոլոր հավասարումների լուծումների բազմությունների միավորումն է:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Բերել երկու փոփոխականով հավասարման այնպիսի օրինակ, որ.

ա) լուծում չունենա,

բ) ունենա ճիշտ մեկ լուծում,

գ) ունենա ճիշտ երկու լուծում,

դ) ունենա ճիշտ երեք լուծում,

ե) ունենա ճիշտ 200 լուծում,

զ) ունենա անվերջ շատ լուծումներ:

Կոորդինատային հարթության վրա պատկերել բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են տրված պայմանին (2-9).

2. $(x+1)(y-3)=0$: **3.** $y^2=3xy$: **4.** $\dfrac{x^2-4xy}{x^2+y^2}=0$:

5. $\dfrac{y-x^2+8}{y^2-16}=0$: **6.** $|y|=|x^2-2x|$: **7.** $|x|+|y|=5$:

8. $4x^2-y^2=4x-1$: **9.** $x^2+y^2=2y+8$:

Համարժե՞ք են արդյոք հետևյալ համակարգերը (10-16).

10. $\begin{cases} x-y=0, \\ 2x+y=3 \end{cases}$ և $\begin{cases} xy=y^2, \\ 2x+y=3: \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+2y=5, \\ 3x-2y=7 \end{cases}$ և $\begin{cases} x+2y=5, \\ (3x-2y)^2=49: \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=5 \end{cases}$ և $\begin{cases} (x-y)(x^2+3y^2)=x^2+3y^2, \\ x+y=5: \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-1=y+1, \\ x+y=0 \end{cases}$ և $\begin{cases} x^2=1, \\ y=-\sqrt{x}: \end{cases}$

14. $\begin{cases} \sqrt{x+5y}=-2, \\ x+y=0 \end{cases}$ և $\begin{cases} x+5y=4, \\ x=-y: \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2=y, \\ y^2=x \end{cases}$ և $\begin{cases} x^4=y^2, \\ y^4=x^2: \end{cases}$

16. $\begin{cases} \left(x^2-xy+y^2\right)(x-y)=4\left(x^2-xy+y^2\right), \\ x^2-5xy+2y^2=8 \end{cases}$ և $\begin{cases} x-y=4, \\ x^2-5xy: \end{cases}$

17. Ապացուցել, որ

$$\begin{cases} f_1(x;y)=0, \\ f_2(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x;y)=0, \\ pf_1(x;y)+qf_2(x;y)=0, \end{cases}$$

որտեղ $q \neq 0$ (p -ն ցանկացած թիվ է):

Ապացուցել, որ եթե $ab \neq 0$, ապա (18-20).

18. $\begin{cases} f_1(x;y)=a, \\ f_2(x;y)=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x;y)=a, \\ f_1(x;y)\cdot f_2(x;y)=ab: \end{cases}$

19. $\begin{cases} f_1(x;y)=a, \\ f_2(x;y)=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x;y)=a, \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)}=\dfrac{a}{b}: \end{cases}$

20. $\begin{cases} f_1(x;y)=a, \\ f_2(x;y)=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x;y)\cdot f_2(x;y)=ab, \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)}=\dfrac{a}{b}: \end{cases}$

21. Ապացուցել, որ $\begin{cases} [f_1(x;y)]^2=[f_1(x;y)]^2, \\ f_2(x;y)=0 \end{cases}$ համակարգը

$\begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ f_2(x;y)=0 \end{cases}$ համակարգի հետևանք է:

22. Ապացուցել, որ $\begin{cases} x^3 - y^3 = a(x-y), \\ x^3 + y^3 = b(x+y) \end{cases}$

համակարգը համարժեք է հավասարումների համակարգերի հետևյալ համախմբին՝

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - b = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - a = 0, \\ x + y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - a = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - b = 0: \end{cases}$$

Ապացուցել պնդումը (23, 24).

23. $$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_2(x;y) = g_2(x;y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_1(x;y)\cdot f_2(x;y) = g_1(x;y)\cdot g_2(x;y): \end{cases}$$

24. Եթե գոյություն չունի այնպիսի x, y թվազույգ, որի դեպքում f_1 և g_1-ը միաժամանակ դառնան զրո, ապա

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_2(x;y) = g_2(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_1(x;y)\cdot f_2(x;y) = g_1(x;y)\cdot g_2(x;y): \end{cases}$$

25. Եթե գոյություն չունի այնպիսի x, y թվազույգ, որի դեպքում f_2 և g_2-ը միաժամանակ դառնան զրո, ապա

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_2(x;y) = g_2(x;y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)} = \dfrac{g_1(x;y)}{g_2(x;y)}: \end{cases}$$

26. Եթե գոյություն չունի այնպիսի x և y թվազույգ, որի դեպքում f_1, g_1, f_2, g_2 արտահայտությունները միաժամանակ դառնան զրո, ապա

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_2(x;y) = g_2(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)} = \dfrac{g_1(x;y)}{g_2(x;y)}: \end{cases}$$

2. Գծային հավասարումների համակարգերի լուծում

$x_1, x_2, ..., x_n$ փոփոխականներով **գծային հավասարում** կոչվում է հետևյալ տեսքի հավասարումը՝

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b: \qquad (1)$$

Ցածր դասարաններից դուք ծանոթ եք x և y երկու փոփոխականներով

$$ax + by = c$$

տեսքի գծային հավասարումներին, որտեղ պահանջվել է, որ a և b գործակիցներից գոնե մեկը զրո չէ: Այժմ դա նպատակահարմար չէ: Գծային հավասարում անվանելու ենք (1) տեսքի ցանկացած հավասարում: Միայն նկատենք, որ

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = b = 0$$

դեպքում թվերի ցանկացած $(x_1, x_2, ..., x_n)$ խումբ (1) հավասարման համար լուծում է, իսկ

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0, \quad b \neq 0$$

դեպքում (1) հավասարումը ոչ մի լուծում չունի:

Տեսնենք, թե գծային հավասարումների համակարգեր լուծելիս ինչպես են կիրառվում 1-ին կետում ձևակերպված կանոնները: Դիտարկենք այնպիսի համակարգեր, որոնց մեջ անհայտների քանակը փոքր չէ երեքից[4]:

Օրինակ 1: ***Լուծենք հետևյալ համակարգը*** ՝

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1: \end{cases} \qquad (2)$$

Լ ու ծ ու մ: Այս համակարգը ձևափոխենք համարժեք համակարգի այնպես, որպեսզի առաջին հավասարման մեջ x փոփոխականի գործակիցը հավասար լինի 1-ի, իսկ մյուս հավասարումների մեջ x-ը: Այդ

[4] *Երկու փոփոխականներով գծային հավասարումների համակարգերի լուծումները ծանոթ են ցածր դասարաններից:*

նպատակով, (2) համակարգի առաջին հավասարումն անդամ առ անդամ բաժանենք x-ի գործակցի վրա, այսինքն՝ 2-ի: Կստանանք նոր համակարգի առաջին հավասարումը՝

$$x-2y+2z=5:$$

Այս հավասարումը, նախապես բազմապատկելով 3-ով, անդամ առ անդամ գումարենք սկզբնական համակարգի երկրորդ հավասարմանը և, նախապես բազմապատկելով –4-ով, գումարենք տրված համակարգի երրորդ հավասարմանը: Կստանանք տրվածին համարժեք համակարգ, որի մեջ x փոփոխականն արտաքսված կլինի երկրորդ և երրորդ հավասարումներից՝

$$\begin{cases} x-2y+2z=5, \\ \quad 2y-4z=-10, \\ \quad 5y-7z=-19: \end{cases} \qquad (3)$$

(3) համակարգի երկրորդ և երրորդ հավասարումները պարունակում են միայն y և z փոփոխականները: Երկրորդ հավասարումն անդամ առ անդամ բաժանելով 2-ի, կստանանք՝

$$y-2z=-5$$

հավասարումը, որի մեջ y փոփոխականի գործակիցը հավասար է 1-ի: Այս հավասարումը նախապես բազմապատկելով –5-ով, անդամ առ անդամ գումարենք (3) համակարգի երրորդ հավասարմանը, կստանանք՝

$$3z=6:$$

Արդյունքում ստացանք այսպիսի համակարգ՝

$$\begin{cases} x-2y+2z=5, \\ \quad\quad y-2z=-5, \\ \quad\quad\quad 3z=6: \end{cases} \qquad (4)$$

Վերջին հավասարումը բաժանելով 3-ի, ստանում ենք, վերջապես, հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x-2y+2z=5, \\ \quad y-2z=-5, \\ \qquad z=2, \end{cases} \qquad (5)$$

որի մեջ անկյունագծի վրա գտնվող գործակիցները հավասար են 1-ի, իսկ անկյունագծից դեպի ձախ գտնվող գործակիցները՝ զրոյի (դրանք չենք գրում): Այսպիսի համակարգը հեշտությամբ է լուծվում՝

$$z=2,\ y=-5+2z=-1,\ x=5+2y-2z=-1:$$

Պատասխան ՝ $(-1;-1;\,2)$:

(5) տեսքի համակարգը կոչվում է **եռանկյուն համակարգ**: Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման այս եղանակն անվանում են **հաջորդաբար արտաքսման** կամ **Գաուսի մեթոդ**:

Օրինակ 2: ***Հետևյալ համակարգը լուծենք Գաուսի մեթոդով.***

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-3x_4=6, \\ 2x_1-5x_2-3x_3+x_4=-11, \\ 5x_1-8x_2+6x_3-4x_4=24, \\ 3x_1-x_2+x_3+12x_4=-4 \end{cases} \qquad (6)$$

Լուծում: Համակարգի առաջին հավասարումը նախապես բազմապատկենք –2-ով և անդամ առ անդամ գումարենք երկրորդ հավասարմանը: Այնուհետև, բազմապատկենք առաջին հավասարումը –5-ով և գումարենք երրորդ հավասարմանը: Վերջապես, առաջին հավասարումը բազմապատկենք –3-ով և ստացված հավասարումը գումարենք չորրորդ հավասարմանը: Այդ դեպքում (6) համակարգը կբերվի իրեն համարժեք հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-3x_4=6, \\ \quad -x_2-5x_3+7x_4=-23, \\ \quad 2x_2+x_3+11x_4=-6, \\ \quad 5x_2-2x_3+21x_4=-22: \end{cases} \qquad (7)$$

Վերն արված ձևափոխությունների շնորհիվ x_1 փոփոխականն արտաքսվեց համակարգի երկրորդ, երրորդ և չորրորդ հավասարումներից: Այնուհետև, (7) համակարգի վերջին երեք հավասարումները ձևափոխենք այնպես, որ նոր համակարգի երրորդ և չորրորդ հավասարումները չպարունակեն x_2 փոփոխականը: Դրա համար այդ համակարգի երկրորդ հավասարումը բազմապատկենք 2-ով և ստացված հավասարումը գումարենք երրորդ հավասարմանը, իսկ հետո երկրորդ հավասարումը բազմապատկենք 5-ով և ստացված հավասարումը գումարենք չորրորդ հավասարմանը: Արդյունքում կունենանք (7) համակարգին համարժեք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ \quad -x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -23, \\ \qquad -9x_3 + 25x_4 = -52, \\ \qquad -27x_3 + 56x_4 = -137: \end{cases} \tag{8}$$

Այժմ, (8) համակարգի երրորդ հավասարումը բազմապատկենք –3-ով և ստացված հավասարումը գումարենք չորրորդին: Այդ դեպքում համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ \quad -x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -23, \\ \qquad -9x_3 + 25x_4 = -52, \\ \qquad\qquad -19x_4 = 19: \end{cases} \tag{9}$$

(9) համակարգի վերջին հավասարումից գտնում ենք՝ $x_4 = -1$, որից հետո երրորդ հավասարումից ստանում ենք՝ $x_3 = 3$, երկրորդից կունենանք՝ $x_2 = 1$ և, վերջապես, առաջինից՝ $x_1 = 2$:

Այսպիսով, (1) համակարգն ունի հետևյալ լուծումը՝

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -1:$$

Օրինակ 3: ***Լուծենք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝***

$$\begin{cases} 2x-4y+4z=10, \\ -3x+8y-10z=-25: \end{cases} \qquad (10)$$

Լուծում: Կրկնելով օրինակ 1-ի հաշվումները, ստանում ենք այսպիսի համակարգ՝

$$\begin{cases} x-2y+2z=5 \\ \qquad y-2z=-5: \end{cases}$$

z-ը համարելով կամայական, ստանում ենք ընդհանուր լուծումը՝

$$y=-5+2z,$$

$$x=5+2y-2z=5+2(-5+2z)-2z=-5+2z:$$

(10) համակարգն ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ:

Պատասխան՝ $\{(2z-5;2z-5;z)\,|\,z\in R\}$:

* * *

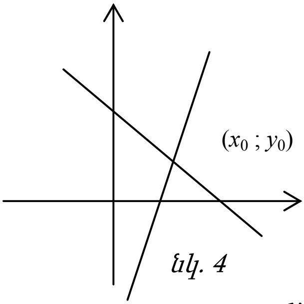
Երկու փոփոխականներով երկու գծային հավասարումների համակարգերի հետազոտումն ավելի հստակ և արդյունավետ կլինի, երբ այն մեկնաբանվում է երկրաչափորեն (թվային հարթության վրա):

Համարելու ենք, որ համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման մեջ փոփոխականների գործակիցներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է:

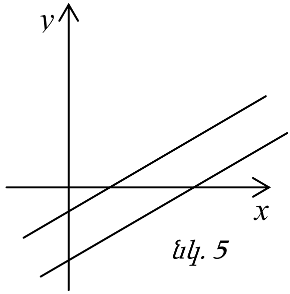
Դեռևս ցածր դասարաններից գիտեք, որ երկու փոփոխականներով գծային հավասարումը կոորդինատային հարթության վրա պատկերում է որևէ ուղիղ: Ընդհանուր դեպքում՝

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

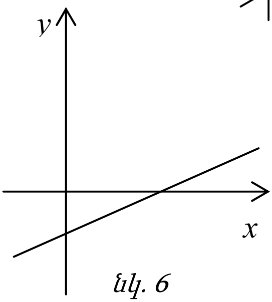
համակարգը պատկերվում է ուղիղների զույգով: Նրանք կա՛մ հատվում են, կա՛մ զուգահեռ են, կա՛մ համընկնում են: Առաջին դեպքում համակարգը մեկ լուծում ունի (նկ. 4), երկրորդ դեպքում համակարգի լուծումների բազմությունը դատարկ է (նկ. 5), երրորդ դեպքում համակարգն անվերջ բազմությամբ լուծումներ ունի (լուծումների բազմությունը թվային հարթության վրա ուղիղ է) (նկ. 6):



նկ. 4



նկ. 5



նկ. 6

Օ ր ի ն ա կ 4: *a* ***պարամետրի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում***

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ ax - 2y = 3 \end{cases}$$

համակարգը լուծում ունի:

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Օգտվենք գծային հավասարումների համակարգի երկրաչափական իմաստից: Համակարգի առաջին հավասարումով տրվող ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է -1-ի, իսկ երկրորդ հավասարումով տրվող ուղղի անկյունային գործակիցը՝ $\frac{a}{2}$-ի: Եթե $\frac{a}{2} \neq -1$ այսինքն՝ $a \neq -2$, այդ ուղիղները հատվում են, հետևաբար համակարգն ունի միակ լուծում:

$a = -2$ դեպքում ուղիղները զուգահեռ են (քանի որ ունեն հավասար անկյունային գործակիցներ) և չեն համընկնում (նկ. 5), հետևաբար համակարգը լուծում չունի:

Պատասխան՝ $a \in R,\ a \neq -2$:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Լուծել հավասարումների համակարգը և տալ երկրաչափական մեկնաբանություն (27-32).

27. $\begin{cases} x-3y=1, \\ 2x+y=4\dfrac{1}{3} : \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 3x-4y=7, \\ 2x+5y=-3 : \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} 0.1x+0.4y=6, \\ 0.2x+0.5y=9 : \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x-8y=0, \\ x-1.6y=1 : \end{cases}$ **31.** $\begin{cases} 4x-6y=8, \\ x-1.5y=2 : \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} \dfrac{7}{4}x-\dfrac{5}{3}y=-1, \\ \dfrac{3}{8}x-\dfrac{4}{9}y=-1 : \end{cases}$

Ապացուցել, որ ցանկացած a-ի դեպքում տրված համակարգն ունի միակ լուծում, և գտնել այդ լուծումը (33, 34).

33. $\begin{cases} 3x+ay=a, \\ ax-2y=a^2+4 : \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} ax+4y=-a, \\ -x+5ay=1 : \end{cases}$

a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգն ունի անվերջ շատ լուծումներ (35-38).

35. $\begin{cases} ax-3y=4, \\ x-y=\dfrac{4}{3} : \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} x+ay=2, \\ 3x-2y=6 : \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 4x+6y=a : \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 2ax+y=5-a^2, \\ -10x+(a-6)y=3a+5 : \end{cases}$

a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգը լուծում չունի (39-42).

39. $\begin{cases} 2x+ay=8, \\ 3x-5y=6 : \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} x-y=3, \\ ax+2y=-6 : \end{cases}$

41. $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x-2y=a: \end{cases}$

42. $\begin{cases} ax+3y=a^2+1, \\ (3a+14)x+(a+8)y=5a^2+5: \end{cases}$

43. Գտնելի a-ի և b-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում

$$\begin{cases} 3x-4y=12, \\ 9x+ay=b \end{cases}$$

համակարգը. ա) չունի լուծում; բ) ունի անվերջ շատ լուծումներ; գ) ունի միակ լուծում:

Հավասարումների համակարգը լուծել Գաուսի մեթոդով (44-51).

44. $\begin{cases} x+y-z=4, \\ x-y+z=6, \\ x-y-z=-8: \end{cases}$

45. $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ x-y+2z=-7, \\ 2x+3y-z=1: \end{cases}$

46. $\begin{cases} x-3y+z=7, \\ 3x+y-2z=3, \\ x+7y-4z=0: \end{cases}$

47. $\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 2x+3y+z=6, \\ 3x+y+2z=6: \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-2x_2-x_3-x_4=3, \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=5, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=-1: \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3-5x_4=2, \\ 4x_1-7x_2-x_3-8x_4=-5, \\ 10x_1-18x_2+2x_3-23x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0: \end{cases}$

50. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3: \end{cases}$

51. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=2, \\ 4x_1-x_2+3x_3+x_4=4: \end{cases}$

Օգտվելով Գաուսի մեթոդից, ապացուցել, որ համակարգը լուծում չունի (52, 53).

52. $\begin{cases} x+y-z=4, \\ x-y+z=-2, \\ x-5y+5z=1: \end{cases}$ **53.** $\begin{cases} 2x+y-z=1, \\ x-y+2z=4, \\ 5x+3y-4z=3: \end{cases}$

54. Լուծել հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=a, \\ x+y+az=a^2 : \end{cases}$$

3. Ոչ գծային ռացիոնալ հավասարումներ և համակարգեր

Հավասարումը կոչվում է **ռացիոնալ** կամ **հանրահաշվական**, եթե նրա ձախ և աջ մասերը փոփոխականների նկատմամբ բազմանդամներ են կամ նրանց կարելի է ներկայացնել բազմանդամների հարաբերության տեսքով:

x և y փոփոխականներով ռացիոնալ հավասարումներ են, օրինակ՝

$$x^2-5xy-4=\sqrt{2}(x-7), \quad \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=(3x+1)y-\frac{4}{x+y}, \quad ax^{-2}-by^{-2}=\frac{x+y}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},$$

x, y, z փոփոխականներով ռացիոնալ հավասարումների օրինակներ են՝

$$xy-3yz=\frac{5x-y^2+z}{4}, \qquad \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=x+y+z \quad \text{և այլն:}$$

Համակարգը կոչվում է **հանրահաշվական**, եթե նրա մեջ մտնող բոլոր հավասարումները հանրահաշվական (ռացիոնալ) են:

Նախորդ կետում մենք քննարկեցինք գծային հավասարումների համակարգեր: Այդպիսի համակարգերը պարզագույն հանրահաշվական համակարգեր են:

Սույն կետում դիտարկելու ենք հանրահաշվական այնպիսի համակարգեր, որոնց մեջ մտնող հավասարումներից գոնե մեկը գծային չէ (համակարգը կարող է պարունակել նաև գծային հավասարումներ): Ծանոթանալու ենք այդպիսի համակարգերի լուծման որոշ հնարների, առանձնահատուկ տեսք ունեցող որոշ համակարգերի, ինչպես նաև բացահայտելու ենք լուծման ընթացքում առաջացող որոշ դժվարությունների հաղթահարման ուղիները:

Ոչ գծային հավասարումների համակարգերը քննարկելիս սահմանափակվելու ենք երեք փոփոխականներով (ի տարբերություն գծային հավասարումների համակարգերի):

Նախապես անենք որոշ նկատառումներ:

1) Երբեմն մեկ հավասարումը համարժեք է լինում երկու հավասարումների համակարգի: Օրինակ՝

$$(x+y)^2+(x-2)^2=0 \qquad (1)$$

հավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-2=0 \end{cases}$$

համակարգին, քանի որ ոչբացասական թվերի գումարը կարող է զրոյի հավասարվել միայն այն դեպքում, երբ նրանք երկուսն էլ հավասար են զրոյի: Հետևաբար, երկու փոփոխականներով (1) հավասարումն ունի միակ լուծում՝ $(2;-2)$:

2) Երբեմն հավասարման լուծումների բազմությունն իրենից ներկայացնում է երկու հավասարումների լուծումների բազմությունների միավորում: Օրինակ՝

$$4x^2-y^2=0 \qquad (2)$$

հավասարումը համարժեք է

$$(2x+y)(2x-y)=0$$

հավասարմանը: Քանի որ արտադրյալը հավասար է զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ բազմապատկիչներից գոնե մեկը հավասար է զրոյի, ուստի (2) հավասարման լուծումների բազմությունը

$$2x+y=0 \qquad \text{և} \qquad 2x-y=0$$

հավասարումների լուծումների բազմությունների միավորումն է: Դրա համար էլ

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0, \\ (x-1)^2 + 3y^2 = 9 \end{cases}$$

համակարգը լուծելու համար անհրաժեշտ է լուծել

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ (x-1)^2 + 3y^2 = 9 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} 2x - y = 0, \\ (x-1)^2 + 3y^2 = 9 : \end{cases}$$

համակարգերը և վերցնել ստացված բոլոր լուծումները:

Հանգունորեն,

$$\begin{cases} (x - 2y)^2 = 4, \\ x^2 - 3y^2 = 13 \end{cases}$$

համակարգի լուծումների բազմությունը

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x^2 - 3y^2 = 13 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} x - 2y = -2, \\ x^2 - 3y^2 = 13 \end{cases}$$

համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորումն է:
Վերն արված դատողությունները հանգեցնում են ևս մեկ հասկացության, որը կարևոր դեր է խաղում հավասարումների համակարգեր լուծելիս:

Դիցուք, հավասարումների համակարգն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0, \\ f_2(x,y) = 0 : \end{cases} \qquad (3)$$

Ասում են, որ (3) համակարգը **համարժեք է**

$$\begin{cases} g_1(x,y) = 0, \\ g_2(x,y) = 0 \end{cases} \quad (4) \qquad \text{և} \qquad \begin{cases} \varphi_1(x,y) = 0, \\ \varphi_2(x,y) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

համակարգերի **համախմբին**, եթե (3) համակարգի յուրաքանչյուր լուծումը հանդիսանում է լուծում (4) և (5) համակարգերից գոնե մեկի համար և (4), (5) համակարգերից յուրաքանչյուրի լուծումը նաև (3) համակարգի լուծում է: Այդ նշանակում է, որ (3) համակարգի լուծումների բազմությունը համընկնում է (4) և (5) համակարգերի լուծումնե-րի բազմությունների միավորման հետ:

Ասում են, որ x և y փոփոխականներով հավասարումների մի քանի համակարգեր կազմում են **համակարգերի համախումբ,** եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այնպիսի (x; y) թվազույգերը, որոնցից յուրաքանչյուրը բավարարում է տրված համակարգերից գոնե մե-կին: Այդպիսի ամեն մի թվազույգը կոչվում է համակարգերի հա-մախմբի **լուծում:** Համախմբի լուծումների բազմությունն, ըստ էության, այդ համախումբը կազմող համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորումն է:

Սովորաբար այդ հասկացությունը կիրառվում է այն դեպքում, երբ (3) համակարգի հավասարումներից որևէ մեկի ձախ մասը վերածվում է բազմապատկիչների:

Օրինակ 1: ***Լուծենք հավասարումների համակարգը*** ՝

$$\begin{cases} y^2-1=4x^2+4x, \\ 4x^2+y^2-3xy=1: \end{cases}$$

Լուծում: Համակարգի առաջին հավասարումից կունենանք՝

$y^2=(2x+1)^2$, այսինքն՝ $y=2x+1$ կամ $y=-2x-1$:

Հետևաբար, տրված համակարգը համարժեք է համակարգերի հետևյալ համախմբին՝

$$\begin{cases} y=2x+1, \\ 4x^2+y^2-3xy=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x-1, \\ 4x^2+y^2-3xy=1: \end{cases}$$

Սկզբում լուծենք առաջին համակարգը: Դրա երկրորդ հավասար-ման մեջ տեղադրելով $y=2x+1$, կստանանք՝

$$4x^2+(2x+1)^2-3x(2x+1)=1, \qquad 2x^2+x+1=1, \qquad \text{այսինքն՝}$$

$x(2x+1)=0$, որտեղից՝ $x=0$ կամ $x=-\dfrac{1}{2}$: Տեղադրելով x-ի այդ արժեքները $y=2x+1$ հավասարման մեջ, համապատասխանաբար, կստանանք՝ $y=1$ կամ $y=0$: Հետևաբար, առաջին համակարգի լուծումները կլինեն՝ $(0;1)$ և $\left(-\frac{1}{2};0\right)$:

Նույն կերպ լուծելով երկրորդ համակարգը, կստանանք $(0;-1)$ և $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ թվազույգերը:

Պատասխան՝ $\left\{(0;1),\left(-\frac{1}{2};0\right),(0;-1)\right\}$:

3) Շատ դեպքերում $f(x;y)=g(x;y)$ հավասարման ձախ և աջ մասերը փոփոխականների ոչ բոլոր արժեքների համար իմաստ ունեն: Օրինակ, թեև

$$\frac{y}{x}=2 \qquad (6)$$

հավասարման ձախ մասն իմաստ չունի միայն $x=0$ արժեքի դեպքում, այնուամենայնիվ $\frac{y}{x}=2$ հավասարումը համարժեք չէ $y=2x$ հավասարմանը: (6) հավասարման լուծումների բազմությունը բաղկացած է $(a;2a)$ տեսքի բոլոր զույգերից, բացառությամբ $(0;0)$ զույգից: Ճիշտ կլինի այսպիսի համարժեքությունը՝

$$\frac{y}{x}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x, \\ x\neq 0, \end{cases}$$

որտեղ աջ մասում գրված է մի համակարգ, որը բաղկացած է մեկ հավասարումից և մեկ անհավասարումից: Նաև ասում են, որ (6) հավասարությունից հետևում է $y=2x$ հավասարությունը՝

$$\frac{y}{x}=2 \Rightarrow y=2x:$$

(6) հավասարման համար $y=2x$ հավասարումն անվանում են **արտածյալ հավասարում** կամ **հետևանք**: Տանք այդ հասկացության ընդհանուր սահմանումը: Դիցուք՝ որոշ ձևափոխություններից հետո

$$f(x;y)=g(x;y) \qquad (7)$$

հավասարումից ստացվել է

$$f_1(x;y)=g_1(x;y) \qquad (7')$$

հավասարումը: Եթե (7) հավասարման ամեն մի լուծում լուծում է նաև (7') հավասարման համար, ապա (7) հավասարման համար (7') հավասարումն անվանում են **արտածյալ հավասարում** կամ **հետևանք**: Այդ փաստը գրառում են այսպես՝

$$f(x;y)=g(x;y) \Rightarrow f_1(x;y)=g_1(x;y):$$

Նաև ասում են, որ $f(x;y)=g(x;y)$ հավասարությունից հետևում է $f_1(x;y)=g_1(x;y)$ հավասարությունը:

Այդ հասկացության սահմանումը նույն ձևով տրվում է նաև համակարգերի համար:

Այն պնդումը, որ

$$\begin{cases} f(x;y)=g(x;y), \\ h(x;y)=\varphi(x;y) \end{cases}$$

համակարգի համար

$$\begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ h_1(x;y)=\varphi_1(x;y) \end{cases}$$

համակարգը **արտածյալ (հետևանք)** համակարգ է, գրառում են այսպես՝

$$\begin{cases} f(x;y)=g(x;y), \\ h(x;y)=\varphi(x;y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x;y)=g_1(x;y), \\ h_1(x;y)=\varphi_1(x;y): \end{cases}$$

Համակարգի հետևանք կարող է լինել նաև մեկ հավասարում: Օրինակ՝

$$\begin{cases} 3x-5y=9, \\ 2x+y=6 \end{cases} \Rightarrow 5x-4y=15$$

(որպես համակարգի հավասարումների գումար):

Հավասարումների համակարգերը լուծելիս համարժեք համակարգերի անցնելու փոխարեն կարելի է անցնել արտածյալ համակարգերի: Սակայն հետո հարկավոր է ստուգել արտածյալ համակարգի ստացված լուծումները:

Օրինակ 2: ***Լուծենք համակարգը***՝

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = x + 5y : \end{cases} \qquad (8)$$

Լուծում: Համակարգի հավասարումները մի անգամ գումարելով, այնուհետև հանելով, կունենանք նրան համարժեք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6(x + y), \\ x^3 - y^3 = 4(x - y) : \end{cases} \qquad (9)$$

Ունենք՝

$$(9) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) - 6(x+y) = 0, \\ (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) - 4(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+y)\left(x^2 - xy + y^2 - 6\right) = 0, \\ (x-y)\left(x^2 + xy + y^2 - 4\right) = 0 : \end{cases} \qquad (10)$$

Քանի որ $(x+y)\left(x^2 - xy + y^2 - 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 6 = 0 \end{array}\right.$

և $(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 6 = 0, \end{array}\right.$

ուստի (10) համակարգը վեր է ածվում (համարժեք է) չորս համակարգերի համախմբի՝

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2-6=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-xy+y^2-6=0, \\ x^2+xy+y^2-4=0; \end{cases}$$

Ստացված համախմբի առաջին երեք համակարգերը լուծելով տեղադրման կանոնով, հեշտությամբ կգտնենք հինգ թվազույգ՝

$$(0;0),\ (2;-2),\ (-2;2),\ \left(\sqrt{6};\sqrt{6}\right),\ \left(-\sqrt{6};-\sqrt{6}\right):$$

Լուծենք չորրորդ համակարգը: Այդ համակարգի հավասարումներն իրարից հանելով և հետո գումարելով, կստանանք իրեն համարժեք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} xy=-1, \\ x^2+y^2=5: \end{cases} \qquad (11)$$

Այնուհետև կարող ենք գրել՝

$$(11) \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-1, \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-1, \\ (x+y)^2=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=-1, \\ x+y=\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases} xy=-1, \\ x+y=-\sqrt{3}: \end{cases}$$

Վերջին երկու պարզ համակարգերը լուծելով տեղադրման մեթոդով, կունենանք ևս չորս լուծում՝

$$\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2};\frac{-\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \left(\frac{-\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2};\frac{-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2};\frac{-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \left(\frac{-\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right):$$

Մենք ստացանք (11) համախմբի բոլոր լուծումները, որոնք էլ կլինեն տրված համակարգի լուծումները (ստացված բոլոր ինը թվազույգերը):

* * *

Հավասարումների համակարգերի լուծման արդյունավետ հնարներից մեկը **փոփոխականի փոխարինման (նոր փոփոխականի ներմուծման)** եղանակն է:

Փոփոխականների փոխարինման մեթոդի էությունը կայանում է հետևյալում: Եթե

$$F_1(x;y)=f_1(\varphi_1(x;y);\ \ \varphi_2(x;y)),$$
$$F_2(x;y)=f_2(\varphi_1(x;y);\ \ \varphi_2(x;y)),$$

ապա

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0 \end{cases} \qquad (12)$$

համակարգը նոր՝ $\varphi_1(x;y)=u,\ \varphi_2(x;y)=v$ փոփոխականների միջոցով կարելի է գրառել

$$\begin{cases} f_1(u;v)=0, \\ f_2(u;v)=0 \end{cases}$$

տեսքով:

Դիցուք $(u_1;v_1),\ (u_2;v_2),\ \ldots,\ (u_n;v_n)$-ը վերջին համակարգի լուծումներն են: Այդ դեպքում խնդիրը հանգեցվում է համակարգերի հետևյալ համախմբի լուծմանը՝

$$\begin{cases} \varphi_1(x;y)=u_1, \\ \varphi_2(x;y)=v_1; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1(x;y)=u_2, \\ \varphi_2(x;y)=v_2; \end{cases} \quad \ldots\ ; \quad \begin{cases} \varphi_1(x;y)=u_n, \\ \varphi_2(x;y)=v_n\ : \end{cases}$$

Այդ համախմբի լուծումների բազմությունն էլ հենց կլինի (12) համակարգի լուծումների բազմությունը:

Օրինակ 3: ***Լուծենք համակարգը***՝

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1, \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22\ : \end{cases}$$

Լուծում: Համակարգի տեսքից պարզ երևում է, որ կարելի է ներմուծել նոր փոփոխականներ՝

$$x^2+y^2-1=t, \qquad \frac{x}{y}=v:$$

Այդ դեպքում համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} \dfrac{3}{t}+\dfrac{2}{v}=1, \\ t+4v=21: \end{cases} \tag{13}$$

Ստացված համակարգը լուծենք տեղադրման կանոնով: Նրա երկրորդ հավասարումից ունենք՝ $t=21-4v$, որը տեղադրելով առաջին հավասարման մեջ կստանանք մեկ՝ v փոփոխականով հավասարում՝

$$\frac{3}{21-4v}+\frac{2}{v}=1: \tag{14}$$

Ունենք՝

$$(14) \Leftrightarrow \begin{cases} 3v+2(21-4v)=v(21-4v), \\ v(21-4v)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v^2-13v+21=0, \\ v(21-4v)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{v}=3, \\ \mathrm{v}=\dfrac{7}{2}: \end{array}\right.$$

Հետևաբար, (13) համակարգը համարժեք է համակարգերի հետևյալ համախմբին՝

$$\begin{cases} v=3, \\ t=9; \end{cases} \qquad \begin{cases} v=\dfrac{7}{2}, \\ t=7: \end{cases}$$

Նշանակում է, որ սկզբնական համակարգը համարժեք է հետևյալ համակարգերի համախմբին՝

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{2}, \\ x^2 + y^2 = 8 : \end{cases}$$

Ստացված համակարգերից յուրաքանչյուրը լուծելով տեղադրման եղանակով, առաջինից կգտնենք՝ $(3;1)$, $(-3;-1)$, իսկ երկրորդից՝

$\left(\dfrac{14\sqrt{106}}{53};\dfrac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\dfrac{14\sqrt{106}}{53};-\dfrac{4\sqrt{106}}{53}\right)$ թվազույգերը:

Ստացված չորս թվազույգերն էլ կազմում են տրված համակարգի լուծումների բազմությունը:

* * *

Այժմ ծանոթանանք համակարգերի տեսության մեջ կարևոր դեր տանող երկու դասի համակարգերի և նրանց լուծման եղանակներին:

1° **Համասեռ համակարգեր**: Երկու՝ x և y փոփոխականներով երկու հավասարումների

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c, \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + \ldots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_nx^n = d \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

տեսքի համակարգը կոչվում է **համասեռ** (այդ հավասարումների ձախ մասերը երկու փոփոխականներով n-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամներ են): Նշենք, որ այդպիսի համակարգի մեջ մտնող հավասարումն անվանում են համասեռ այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա աջ մասը հավասար է 0-ի ($c = 0$ կամ $d = 0$): Համասեռ հավասա-րումների համակարգերը լուծվում են երկու հնարների համատեղ կիրառմամբ՝ գծային ձևափոխություն և նոր փոփոխակա-նի ներմուծում:

Օրինակ 4: ***Լուծենք հավասարումների համակարգը՝***

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1: \end{cases}$$

Լուծում: Եթե առաջին հավասարման մեջ տեղադրենք $y = 0$, կստանանք նաև $x = 0$: Սակայն $(0;0)$ թվազույգը չի բավարարում համակարգի երկրորդ հավասարմանը: Նշանակում է՝ $y \neq 0$: Համակարգի առաջին հավասարման (համասեռ հավասարում է) երկու մասերը բաժանելով y^2-ի վրա, կստանանք

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 3 = 0$$

հավասարումը, որը երկրորդ հավասարման հետ կկազմի տրվածին համարժեք համակարգ: Ստացվում է $\frac{x}{y}$-ի նկատմամբ քառակուսային հավասարում, որտեղից կգտնենք՝

$$\frac{x}{y} = -1 \quad \text{կամ} \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{2},$$

այսինքն՝ $x = -y$ կամ $x = \frac{3}{2}y$: Հետևաբար, սկզբնական համակարգը համարժեք է համակարգերի հետևյալ համախմբին՝

$$\begin{cases} x = -y, \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1: \end{cases}$$

Առաջին համակարգից տեղադրությամբ կստանանք $6y^2 = -1$, որն արմատ չունի: Նույն կանոնով լուծելով երկրորդ համակարգը, կգտնենք երկու լուծում՝ $(3;2)$ և $(-3;-2)$, որոնք էլ տրված համակարգի լուծումներն են:

Պատասխան՝ $(3;2)$, $(-3;-2)$:

Օրինակ 5: ***Լուծենք հավասարումների համակարգը՝***

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 7: \end{cases}$$

Լուծում: Առաջին հավասարման երկու մասերը բազմապատկելով 7-ով, երկրորդինը՝ 5-ով, ապա գումարելով, կստանանք՝

$$12y^2 - 2x^2 - 5xy = 0:$$

Հետևաբար, տրված համակարգը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ 12y^2 - 2x^2 - 5xy = 0: \end{cases}$$

Հետևելով նախորդ օրինակի լուծման եղանակին, կգտնենք այս համակարգի լուծումները՝

$$(3;2),\ (-3;-2),\ \left(\frac{4}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{4}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

որոնք էլ միաժամանակ սկզբնական համակարգի լուծումներն են: Վերջին համակարգը լուծեք ինքնուրույն:

Օրինակների միջոցով մենք ցուցադրեցինք (S) տեսքի համասեռ համակարգերի լուծման եղանակը $n = 2$ դեպքում: Այդպիսի համակարգերը $n \geq 3$ դեպքում ևս կարելի է լուծել այդ նույն եղանակով:

Նշենք, որ եթե $c = d = 0$, ապա (S) համակարգի լուծում է նաև $(0;0)$ թվազույգը:

* * *

2° **Սիմետրիկ համակարգեր**: $F(x;y)=0$ $(F(x;y;z)=0)$ հավասարումն անվանում են **սիմետրիկ**, եթե F-ը x և y (x, y և z) փոփոխականների նկատմամբ սիմետրիկ արտահայտություն է[5]:

Համակարգը կոչվում է **սիմետրիկ**, եթե նրանում եղած բոլոր հավասարումները սիմետրիկ են:

x և y երկու փոփոխականներով պարզագույն սիմետրիկ համակարգն ունի

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b \end{cases}$$

տեսքը, իսկ $x;y;z$ երեք փոփոխականներով պարզագույն սիմետրիկ համակարգը՝

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+yz+zx=b, \\ xyz=c \end{cases}$$

տեսքը[6]:

Նշված տեսքերով համակարգերից յուրաքանչյուրը հեշտությամբ լուծվում է տեղադրման կանոնով: Արդյունքում առաջին համակարգից ստացվում է քառակուսային հավասարում, իսկ երկրորդից՝ խորանարդ հավասարում: Դրանք կարելի է լուծել նաև այլ կերպ՝ օգտվելով Վիետի թեորեմի հակադարձ թեորեմից (հիշեք այդ թեորեմները):

Սիմետրիկ համակարգերը կարելի է լուծել փոփոխականների փոխարինման եղանակով: Որպես նոր փոփոխականներ ընտրում են հիմնական սիմետրիկ բազմանդամները:

---

[5] *Այդպիսի սահմանում տրվում է նաև երեքից ավելի փոփոխականներով հավասարումների համար:*

[6] *Նշված համակարգերի հավասարումների ձախ մասերը պարզագույն (հիմնական) սիմետրիկ բազմանդամներն են:*

Օրինակ 6: ***Լուծենք հետևյալ համակարգը՝***

$$\begin{cases} x^3 + x^2y^2 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5 : \end{cases}$$

Լուծում: Դժվար չէ նկատել, որ համակարգը սիմետրիկ է (հավասարումների ձախ մասերը x և y փոփոխականների նկատմամբ սիմետրիկ արտահայտություններ են):

Ներմուծենք նոր փոփոխականներ՝

$$x + y = u, \qquad xy = v :$$

Քանի որ $x^3 + y^3 = u^3 - 3v$, ուստի տրված համակարգը կբերվի հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17, \\ u + v = 5 : \end{cases}$$

Այս համակարգը լուծելով տեղադրման եղանակով, կգտնենք՝

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2 \end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases} u = 2, \\ v = 3 : \end{cases}$$

Անդրադառնալով սկզբնական անհայտներին, ստանում ենք տրված համակարգին համարժեք հետևյալ համակարգերի համախումբը՝

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3 : \end{cases}$$

Լուծելով այդ պարզ համակարգերը, կգտնենք համախմբի լուծումները՝ $(2;3)$ և $(3;2)$, որոնք էլ սկզբնական համակարգի լուծումներն են:

Համակարգերին վերաբերվող բոլոր սահմանումներն ու փաստերը ուժի մեջ են նաև երեք փոփոխական պարունակող համակարգերի դեպքում: Դիտարկենք երեք անհայտ պարունակող համակարգի օրինակներ:

Օրինակ 7: ***Լուծենք հետևյալ համակարգը՝***

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+z}=2, \\ \dfrac{xyz}{y+z}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{xyz}{z+x}=\dfrac{3}{2}: \end{cases} \qquad (15)$$

Լուծում: Ունենք՝

$$(15) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}=\dfrac{2}{3}: \end{cases}$$

Կատարենք փոփոխականների փոխարինում: Նշանակենք՝

$$\frac{1}{yz}=u, \qquad \frac{1}{zx}=v, \qquad \frac{1}{xy}=t:$$

Կստանանք գծային հավասարումների պարզ համակարգ՝

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{1}{2}, \\ v+t=\dfrac{5}{6}, \\ t+u=\dfrac{2}{3}: \end{cases} \qquad (16)$$

Գումարելով (16) համակարգի հավասարումները, կունենանք՝

$$u+v+t=1: \qquad (17)$$

(16)-ից և (17)-ից կստանանք՝ $t=\frac{1}{2}$, $u=\frac{1}{6}$, $v=\frac{1}{3}$, ուստի և ստանում ենք տրվածին համարժեք

$$\begin{cases} yz=6, \\ zx=3, \\ xy=2: \end{cases} \qquad (18)$$

համակարգը: Անդամ առ անդամ բազմապատկելով (19) համակարգի հավասարումները, ստանում ենք՝

$$(xyz)^2=36, \text{ որտեղից՝ } xyz=6 \text{ կամ } xyz=-6:$$

Հետևաբար, (15) համակարգը համարժեք է համակարգերի հետևյալ համախմբին՝

$$\begin{cases} xyz=6, \\ zx=3, \\ xy=2; \end{cases} \quad \begin{cases} xyz=-6, \\ zx=3, \\ xy=2; \end{cases}$$

Ստացված համակարգերից անմիջապես կստանանք պատասխանը՝

$$(1;2;3); \quad (-1;-2;-3):$$

Օրինակ 8: ***Լուծենք երեք անհայտով երկու հավասարումների հետևյալ համակարգը***՝

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16: \end{cases}$$

Լուծում:

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ 2xy-(4-x-y)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ 2xy-\left(16+x^2+y^2-8x-8y+2xy\right)=16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - x - y, \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0, \\ y - 4 = 0, \\ z = 4 - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 4, \\ z = -4 : \end{cases}$$

Բացատրեք վերջին օրինակի լուծման ընթացքը:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Լուծել հավասարումների համակարգը (55-121).

55. $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41 : \end{cases}$

56. $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - xy + y^2 = 52 : \end{cases}$

57. $\begin{cases} 3x + 5y = 2, \\ 3x^2 + 10xy - 25y^2 = 0 : \end{cases}$

58. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x + y = 5 : \end{cases}$

59. $\begin{cases} x^2 + 2y = -5, \\ 2x^2 + 3y^2 = 29 : \end{cases}$

60. $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ x^2 + y^3 = 28 : \end{cases}$

61. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6 : \end{cases}$

62. $\begin{cases} 2x - 3y - xy = 4, \\ 3x + y + 3xy = 3 : \end{cases}$

63. $\begin{cases} (x-1)(y-1) = -8, \\ (x+2)(y+2) = 7 : \end{cases}$

64. $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 2 : \end{cases}$

65. $\begin{cases} 2x + y = 3x^2, \\ x + 2y = 3y^2 : \end{cases}$

66. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 = 0 : \end{cases}$

67. $\begin{cases} 5x^2 - x + y^2 = 4, \\ 8x^2 - xy + 2y^2 = 8 : \end{cases}$

68. $\begin{cases} x^2y^2 - 3y^2 + xy + 1 = 0, \\ 3x^2y^2 - 6y^2 + xy + 2 = 0 : \end{cases}$

69. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2, \\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{7}{x-y}=7: \end{cases}$

70. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3, \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20: \end{cases}$

71. $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x^2y+y^2x=30: \end{cases}$

72. $\begin{cases} x^2+x+xy=8, \\ y^2+y+xy=4: \end{cases}$

73. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x^3}{y^3}=14, \\ x+y=3: \end{cases}$

74. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y, \\ (x-y)^2-2y=3-2x: \end{cases}$

75. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=6, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{15}{2}: \end{cases}$

76. $\begin{cases} x-y+xy=17, \\ x^2+y^2=34: \end{cases}$

77. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23: \end{cases}$

78. $\begin{cases} x^2+5xy+y^2=1, \\ x^2y-y^2x=30: \end{cases}$

79. $\begin{cases} 6x^2+xy-2y^2=0, \\ 3x^2-xy-2y^2=0: \end{cases}$

80. $\begin{cases} 4x^2-3xy-y^2=0, \\ 32x^2-36xy+9y^2=6: \end{cases}$

81. $\begin{cases} x^2+xy+4y^2=6, \\ 3x^2+8y^2=14: \end{cases}$

82. $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=3, \\ 2x^2-2xy-y^2=-6: \end{cases}$

83. $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29, \\ 7x^2-8xy+7y^2=43: \end{cases}$

84. $\begin{cases} x^3+y^3=26, \\ x^2y+xy^2=-6: \end{cases}$

85. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5: \end{cases}$

86. $\begin{cases} x^4-y^4=15, \\ x^3y-xy^3=6: \end{cases}$

87. $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136, \\ x^3y+xy^3=30: \end{cases}$

88. $\begin{cases} x^2+4xy-2y^2=5(x+y), \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y): \end{cases}$

89. $\begin{cases} x^4+y^4-x^2y^2=13, \\ x^2-y^2+2xy=1 \end{cases}$ (սահմանափակվել ամբողջ լուծումներով):

90. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}: \end{cases}$

91. $\begin{cases} x^2+y^2=xy+7, \\ x^3+y^3=6xy-1: \end{cases}$

92. $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ xy=2: \end{cases}$

93. $\begin{cases} x+y=5, \\ x^4+y^4=97: \end{cases}$

94. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=133, \\ x^2-xy+y^2=19: \end{cases}$

95. $\begin{cases} x+y=3, \\ x^5+y^5=33: \end{cases}$

96. $\begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7}, \\ x^2+xy+y^2=3: \end{cases}$

97. $\begin{cases} x^3-y^3=26, \\ x^4-y^4=20(x+y): \end{cases}$

98. $\begin{cases} \left(x^2-xy+y^2\right)(x-y)=1+y^3, \\ \left(x^2+xy+y^2\right)(x+y)=1-y^3: \end{cases}$

99. $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x, \\ y^2-5x^2=4: \end{cases}$

100*. $\begin{cases} x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0, \\ x^2+3xy+2y^2-x+y-6=0: \end{cases}$

101*. $\begin{cases} x^3y+x^3y^2+2x^2y^2+x^2y^3+xy^3=30, \\ x^2y+xy+x+y+xy^2=11: \end{cases}$

102*. $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^4+y^4=1: \end{cases}$

103*. $\begin{cases} x^5+x^3=y^5+y^3, \\ x^4y+xy^4+x^3+y^3=80: \end{cases}$

104*. $\begin{cases} 1+xy=\dfrac{18xy}{x+y}, \\ 1+x^2y^2=\dfrac{208x^2y^2}{x^2+y^2}: \end{cases}$

105. $\begin{cases} xy+yz=8, \\ yz+zx=9, \\ zx+xy=5: \end{cases}$

106. $\begin{cases} x+yz=2, \\ y+zx=2, \\ z+xy=2: \end{cases}$

107. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x(y+z)=5, \\ y(x+z)=8: \end{cases}$

108. $\begin{cases} 4x^2+4y+1=0, \\ 4y^2+4z+1=0, \\ 4z^2+4x+1=0: \end{cases}$

109. $\begin{cases} xy+x+y=1, \\ yz+y+z=5, \\ xz+x+z=2: \end{cases}$

110. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{3}{4}: \end{cases}$

111. $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz: \end{cases}$

112. $\begin{cases} x+y=3z, \\ x^2+y^2=5z, \\ x^3+y^3=9z: \end{cases}$

113. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ xy+yz+zx=11, \\ xyz=6:(x>0,\ \ y>0,\ \ z>0) \end{cases}$

114*. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=10, \\ x^3+y^3+z^3=28: \end{cases}$

115*. $\begin{cases} x-y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ x^3-y^3+z^3=36: \end{cases}$

116. $\begin{cases} \dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{15}{2x}, \\ \dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{20}{3y}, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6z}: \end{cases}$

117*. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3, \\ x+y+z=3: \end{cases}$

118*. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^2+xz+z^2=28, \\ y^2+yz+z^2=19: \end{cases}$

119*. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{3}: \end{cases}$

120*. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx, \\ x^3-y^2+z=52: \end{cases}$

121*. $\begin{cases} 4x-y^2=1, \\ 4y-z^2=1, \\ 4z-x^2=1: \end{cases}$

a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգն ունի միակ լուծում (122, 123).

122. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a: \end{cases}$

123*. $\begin{cases} x-y=a(1+xy), \\ xy+x+y+2=0: \end{cases}$

124. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$\begin{cases} a^2x^2-2axy+y^2=1, \\ x^2+4xy+4y^2=a^2 \end{cases}$$

համակարգը լուծում չունի:

125. Որոշել, թե a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a+3, \\ xy=a+1 \end{cases}$$

համակարգն ունի ճիշտ երկու լուծում:

126. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$\begin{cases} a^2x^2 + 2axy + y^2 - 1 = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

համակարգն ունի անվերջ շատ լուծումներ:

127*. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում գոյություն ունի այնպիսի b թիվ, որի դեպքում

$$\begin{cases} 3|x| + |y| = 3, \\ (x-a)^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

համակարգն ունի ճիշտ երեք լուծում:

a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում համակարգն ունի միակ լուծում (128, 129).

128*. $\begin{cases} x^4 - 2y^2 + 34 = a^5 - b, \\ 5x^2 + |y| = a + b : \end{cases}$ **129*.** $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 : \end{cases}$

130*. Ապացուցել, որ եթե x, y, z թվերը բավարարում են

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

համակարգին, ապա նրանցից գոնե մեկը հավասար է a-ի:

§3. ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

1. Երկու փոփոխականներով անհավասարումներ և անհավասարումների համակարգեր

Ցածր դասարաններից դուք ծանոթ եք երկու փոփոխականներով անհավասարումների որոշ համակարգերի հետ£ Հիշեցնենք« որ երկու փոփոխականներով

$$f(x;y)>0 \quad (\text{կամ՝ } f(x;y)\geq 0)$$

անհավասարման **լուծում** անվանում են ամեն մի $(x;y)$ կարգավորյալ թվազույգը, որն անհավասարման մեջ տեղադրելուց ստացվում է թվային ճիշտ անհավասարություն: Կարճ ասում են, որ $(x;y)$ թվազույգը բավարարում է տրված անհավասարմանը: Օրինակ՝

$$x^4-y^3>0$$

անհավասարման համար $(-2;1)$ թվազույգը լուծում է, իսկ $(2;3)$ թվազույգը լուծում չէ (ստուգեք):

Անհավասարումը լուծել նշանակում է գտնել այդ անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը: Երկու փոփոխականներով անհավասարման համար այդ բազմությունը R^2-ի մի որոշ ենթաբազմություն է: Այդպիսի անհավասարումները, ընդհանրապես ասած, ունեն անվերջ բազմությամբ լուծումներ: Այդ նկատառումով էլ հարմար է լուծումների բազմությունը պատկերել կոորդինատային հարթության կետերով, այլ կերպ՝ լուծումների բազմությունը ներկայացվում է երկրաչափական մեկնաբանությամբ: Այդպես այն դառնում է ակնառու և հասկանալի:

Օրինակ 1: ***Կոորդինատային հարթության վրա նշել***

$$2y-3x-6\leq 0 \qquad (1)$$

անհավասարման լուծումների բազմությունը:

Լուծում: $2y-3x-6=0$ հավասարման լուծումների բազմությունը կոորդինատային հար-թության վրա ներկայացնում է ուղիղ գիծ, որն անցնում է $(-2;0)$ և $(0;3)$ կետերով (նկ. 7):

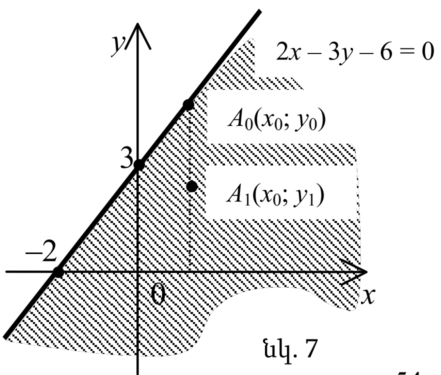
Այդ ուղիղը հարթությունը տրոհում է երկու կիսահարթությունների: Կիսահարթություններից մեկի ցանկացած $(x;y)$ կետ բավարարում է (1) անհավասարմանը (նկարում՝ ուղղից ներքև ընկած ստվարագծված մասը), իսկ մյուս կիսահարթության և ոչ մի $(x;y)$ կետ չի բավարարում (1) անհավասարմանը (այդ տիրույթի ցանկացած $(x;y)$ կետի համար $2y-3x-6>0$): Նկատենք, որ $2y-3x-6=0$ ուղղի բոլոր կետերը պատկանում են որոնելի բազմությանը:

Ընդհանրապես, հիշենք, որ $ax+by+c>0$ կամ $ax+by+c\geq 0$ գծային անհավասարման լուծումների բազմությունը կիսահարթություն է, ընդ որում, կիսահարթության եզրը պատկանում է այդ բազմությանը, եթե անհավասարությունը ոչ խիստ է և չի պատկանում, եթե անհավասարությունը խիստ է (այս դեպքում կիսահարթության երզը պատկերվում է կետագծերով):

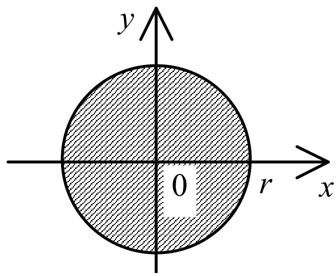
Ինչպես հայտնի է, $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ հավասարման լուծումների բազմությունը r շառավղով շրջանագիծ է , որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում:

$$x^2+y^2\leq r^2 \text{ կամ } x^2+y^2<r^2$$

անհավասարման լուծումների բազմությունը r շառավղով և $(0;0)$ կենտրոնով շրջան է (ոչ խիստ անհավասարության դեպքում շրջանագիծը պատկանում է այդ բազմությանը (նկ. 8), իսկ խիստ անհավասարության դեպքում՝ չի պատկանում):



նկ. 7



նկ. 8

$$x^2 + y^2 > r^2$$

անհավասարման լուծումների բազմությունը նշված շրջանի լրացումն է: Ընդհանուր դեպքում

$$f(x;y) > 0 \quad (\text{կամ՝ } f(x;y) \geq 0)$$

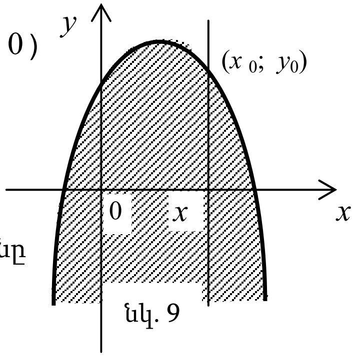
անհավասարման լուծումների բազմությունը մի որոշ պատկեր է հարթության վրա:

Օրինակ,

$$y + x^2 - 2x - 2 \leq 0$$

անհավասարման լուծումների բազմությունը հարթության վրա այն պատկերն է, որի եզրը

$$y = 2 + 2x - x^2$$



նկ. 9

պարաբոլն է: Այդ պարաբոլը ամբողջ հարթությունը տրոհում է երկու բազմությունների՝ պարաբոլի «ներքին տիրույթի» (նկարում այդ մասը գծապատված է) և «արտաքին տիրույթի»: Տրված անհավասարման լուծումների բազմությունը 9-րդ նկարում գծապատված է: Իրոք« վերցնենք ցանկացած x_0 թիվ: $x = x_0$ ուղղաձիգ ուղղի վրա կա այդ տիրույթի եզրի միակ կետ, որի օրդինատն է՝ $y_0 = 2x_0 - {x_0}^2 + 2$: Այդ ուղղաձիգ ուղղի այն բոլոր կետերի համար, որոնք գտնվում են $(x_0;y_0)$ կետից ներքև, $y < y_0$, այսինքն՝ այդ կետերը պատկանում են տրված անհավասարման լուծումների բազմությանը: Ակնհայտ է, որ նշված ուղղի՝ $(x_0;y_0)$ կետից վերև գտնվող կետերից և ոչ մեկը չի պատկանում լուծումների բազմությանը (այդպիսի $(x;y)$ կետերի համար $y + x^2 - 2x - 2 > 0$):

Դիցուք, տրված է անհավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} f(x;y) > 0, \\ g(x;y) > 0: \end{cases}$$

Այս **համակարգի լուծում** կոչվում է ամեն մի կարգավորյալ թվազույգ, որը բավարարում է այդ համակարգի յուրաքանչյուր անհավասարմանը: Հետևաբար, համակարգի լուծումների բազմությունը համակարգի մեջ մտնող անհավասարումների լուծումների բազմություն-ների հատումն է:

Օ ր ի ն ա կ 2: ***Լուծենք անհավասարումների հետևյալ համակարգը***՝

$$\begin{cases} x-y\geq 2, \\ x+2y\geq 6: \end{cases}$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Կառուցենք $x-y=2$ (ℓ_1) և $x+2y=6$ (ℓ_2) ուղիղները (նկ. 6): Լուծելով

$$\begin{cases} x-y=2, \\ x+2y=6 \end{cases}$$

համակարգը, կստանանք՝ $x=3$; $y=1$: Հետևաբար, ℓ_1 և ℓ_2 ուղիղները հատվում են $A(3;1)$ կետում: Դժվար չէ նկատել, որ տրված համակարգի լուծումների բազմությունը 10 ա) նկարում պատկերված գծապատված անկյունն է: Նշենք, որ այդ անկյան կողմերը պատկա-նում են որոնելի բազմությանը (քանի որ տրված համակարգի յուրա-քանչյուր անհավասարումը ոչ խիստ է):

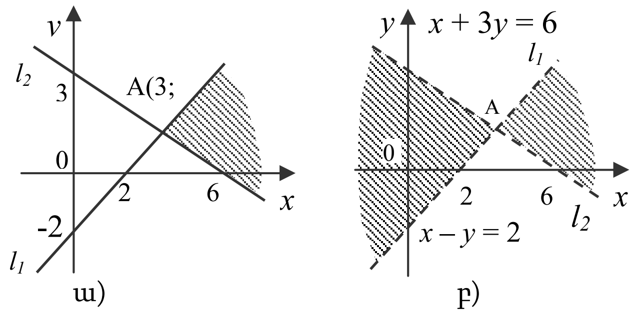
Օ ր ի ն ա կ 3: ***Լուծենք հետևյալ անհավասարումը***՝

$$(x-y-2)(x+3y-6)>0: \qquad (2)$$

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: (2) անհավասարումը համարժեք է անհավասարումնե-րի երկու համակարգերի համախմբին՝

$$\begin{cases} x-y-2>0, \\ x+3y-6>0; \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} x-y-2<0, \\ x+3y-6<0: \end{cases} \quad (4)$$

(3) համակարգի լուծումների բազմությունն անկյուն է, որը պատ-կերված է 10ա նկարում (անկյան կողմերը չեն պատկանում այդ բազ-մությանը), իսկ (4) համակարգի լուծումների բազմությունը նշված անկյան հակադիր անկյունն է (այստեղ ևս անկյան կողմերը դուրս են մնում): Այդ անկյունների միավորումն էլ հենց ներկայացնում է (2) ան-հավասարման լուծումների բազմությունը (նկ. 10 բ)):

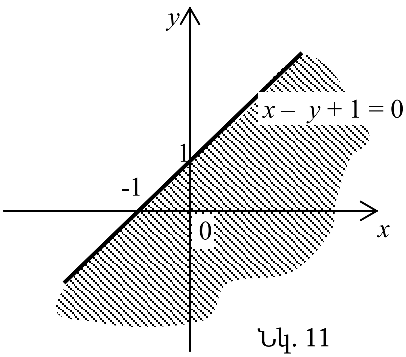


Նկ. 10

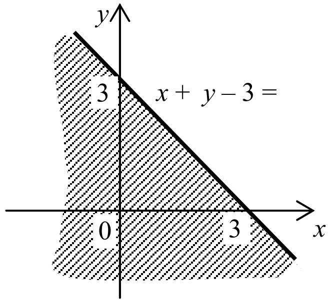
Օրինակ 4: **Գտնենք հետևյալ համակարգի լուծումների բազմությունը՝**

$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ x + 3y + 1 \geq 0: \end{cases}$$

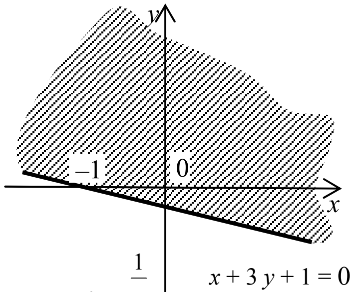
Լուծում: Այս համակարգի յուրաքանչյուր անհավասարման լուծումների բազմությունը կիսահարթություն է (նկ. 11-13)։ Իսկ տրված համակարգի լուծումների բազմությունն այդ կիսահարթությունների հատումն է (նկ. 11)։



Նկ. 11



Նկ. 12

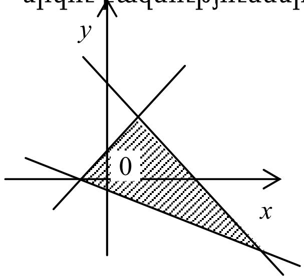


Նկ. 13

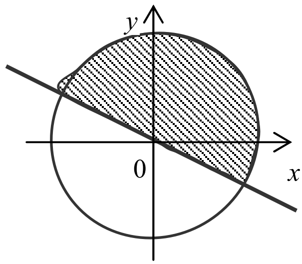
Օրինակ 5: **Գտնենք հետևյալ համակարգի լուծումների բազմությունը՝**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ 2x + 3y \ge 0 : \end{cases}$$

Լուծում: Առաջին անհավասարման լուծումների բազմությունը 2 շառավղով շրջան է, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում: Երկրորդ անհավասարման լուծումների բազմությունը կիսահարթություն է: Համակարգի լուծումների բազմությունն այդ երկու բազմությունների հատումն է, որը կիսաշրջան է (նկ. 15):



Նկ. 14



Նկ. 15

Օրինակ 6: **Գտնենք հետևյալ համակարգի լուծումների բազմությունը՝**

$$\begin{cases} 3x - 2y - 1 \ge 0, \\ 3x - 2y + 3 \le 0 : \end{cases}$$

Լուծում: Համակարգի անհավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումների բազմությունը կիսահարթություն է: Այս կիսահարթությունների եզրերը զուգահեռ ուղիղներ են (նրանց անկյունային գործակիցները հավասար են): Տվյալ դեպքում կիսահարթությունների հատումը դատարկ բազմություն է, հետևաբար համակարգն անհամատեղ համակարգ է:

Օրինակ 8: **Կոորդինատային հարթության վրա պատկերել այն Φ պատկերը, որը տրվում է անհավասարումների հետևյալ համակարգով՝**

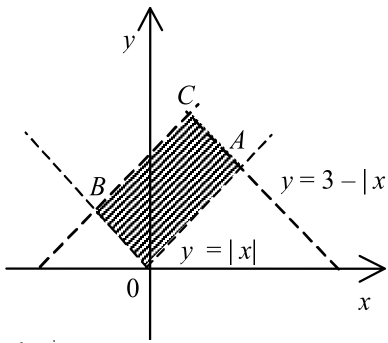
$$\begin{cases} y > |x|, \\ y < 3 - |x-1| : \end{cases}$$

Գտնել Φ պատկերի S մակերեսը:

Լուծում: Կառուցենք $y = |x|$ և $y = 3 - |x-1|$ ֆունկցիաների գրաֆիկները (նկ. 16): Լուծելով

$$\begin{cases} y = |x|, \\ y = 3 - |x-1| \end{cases}$$

համակարգը, գտնում ենք այդ գրաֆիկների հատման կետերը՝ $A(2;2)$, $B(-1;1)$: $y > |x|$ անհավասարմանը բավարարում են հարթության բոլոր այն կետերը, որոնք ընկած են $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկից վերև,



Նկ.16

իսկ $y < 3 - |x-1|$ անհավասարմանը՝ հարթության բոլոր այն կետերը, որոնք գտնվում են $y = 3 - |x-1|$ ֆունկցիայի գրաֆիկից ներքև: Հետևաբար, տրված համակարգի լուծումների բազմությունը պատկերվում է $OACB$ ուղղանկյան ներսի բոլոր կետերով (նկարում գծապատված մասը)։

Այժմ որոշենք այդ ուղղանկյան մակերեսը։ Քանի որ $OB=\sqrt{2}$, $OA=2\sqrt{2}$, ուստի

$$S=OB\cdot OA=4\text{ ։}$$

* * *

Դիտողություն։ Եթե $P(x;y)$-ը և $Q(x;y)$-ը x և y փոփոխականներով բազմանդամներ են, ապա

$$P(x;y)\cdot Q(x;y)\geq 0 \quad \text{կամ} \quad \frac{P(x;y)}{Q(x;y)}\geq 0$$

անհավասարման լուծումների բազմությունը կոորդինատային հարթության վրա պատկերելու համար օգտակար է կիրառել, այսպես կոչված, «**տիրույթների եղանակը**», որը, ըստ էության, միջակայքերի եղանակի ընդհանրացումն է՝ երկու փոփոխականով բազմանդամների դեպքում։ Այդ նպատակով սկզբում պատկերում են հարթության բոլոր այն $(x;y)$ կետերը, որոնց դեպքում $P(x;y)=0$ կամ $Q(x;y)=0$ (այլ կերպ՝ կառուցվում են $P(x;y)=0$ և $Q(x;y)=0$ հավասարումների գրաֆիկները)։ Այդ բազմությունը (որը, ընդհանրապես, xOy հարթության որոշ կորերի միավորում է) հարթությունը տրոհում է մի քանի տիրույթների։ Նրանցից յուրաքանչյուրում երկու փոփոխականով $P(x;y)\cdot Q(x;y)$ (կամ՝ $\dfrac{P(x;y)}{Q(x;y)}$) ֆունկցիան ընդունում է միևնույն նշանի արժեքներ (պահպանում է հաստատուն նշան)։ Այս նկատառումով էլ տվյալ տիրույթում ֆունկցիայի նշանը որոշելու համար բավական է գտնել ֆունկցիայի նշանը նրա որևէ կետում (հիշենք մեկ փոփոխականով ռացիոնալ անհավասարումների լուծման միջակայքերի եղանակը)։

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Կոորդինատային հարթության վրա պատկերել անհավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունը (394-413).

1. $\begin{cases} x-2y \le 1, \\ y-2x \ge 1: \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-y-1 \le 0, \\ x+2y+2 \ge 0: \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+2y+1 \ge 0, \\ 3x+2y-3 \le 0: \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y > 2, \\ x-y < 2, \\ x-3y > -2: \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y \ge 0, \\ x-y \le 0, \\ x-4y \ge -6: \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+2y \le 1, \\ x+1 \ge 0, \\ y \ge 0: \end{cases}$

7. $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x+y \le 2, \\ x-2y \ge -1: \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y+2 \ge 0, \\ x+2y-4 \le 0, \\ x-2 \le 0, \\ x+y+1 \ge 0: \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-y+2 \ge 0, \\ 3x-y-4 \le 0, \\ x+1 \ge 0, \\ y \ge 0: \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-2y+1 \ge 0, \\ 3x+y-11 \le 0, \\ x+4y \ge 0, \\ x \ge 0: \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+y^2 \le 9, \\ x+y \ge 0: \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+y^2 \le 16, \\ x^2+y^2 \ge 1: \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2-y \le 2, \\ x+y \le 0: \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-4x \le y-3, \\ 2x \ge y+2: \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + y \le 0, \\ 2x^2 + y \le 1 : \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ x + y \ge 0, \\ x - y \le 0 : \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ x \ge -1, \\ y \ge 2 : \end{cases}$

18. $\begin{cases} y \le \sin x, \\ y + 0.5\pi \ge |x - 0.5\pi| : \end{cases}$

19. $\begin{cases} \left(x^2 + y^2 - 2\right)\left(x^2 - y\right) \le 0, \\ |y| \le 2 : \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)} \le 0, \\ |x| + |y| \le 2 : \end{cases}$

Գտնել բնական x և y թվերի բոլոր $(x; y)$ զույգերը, որոնք հետևյալ համակարգի լուծումներ են (21, 22).

21. $\begin{cases} x - y - 2 < 0, \\ x + 2y - 9 > 0, \\ x - 2y + 3 > 0 : \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + 3y - 11 > 0, \\ x + y - 8 < 0, \\ x - 2y + 4 > 0 : \end{cases}$

23. Գտնել x և y ամբողջ թվերի բոլոր $(x; y)$ զույգերը, որոնք բավարարում են

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \\ 4x + 2y > 3 \end{cases}$$

համակարգին:

Գտնել այն պատկերի մակերեսը, որը կոորդինատային հարթության վրա տրվում է հետևյալ համակարգով (24-31).

24. $\begin{cases} y - x < 2, \\ x + y < 2, \\ y > 0 : \end{cases}$

25. $\begin{cases} y < 3 - |x|, \\ |x + 1| - y < 0 : \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2+y^2<4, \\ (x-1)^2+y^2>1: \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2+y^2\le 6x+2y+2, \\ y\ge -2: \end{cases}$

28. $\begin{cases} |x+1|+|y|\le 2, \\ (x+2)^2+y^2\le 1: \end{cases}$

29. $\begin{cases} |x|+|y+1|\le 2, \\ x^2+y^2\ge 1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}y: \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2+y^2\le 4x, \\ |y|\ge|2-x|: \end{cases}$

31. $\begin{cases} x\le\dfrac{10-\pi}{2}, \\ |y|\le 2, \\ x^2+y^2\ge 8: \end{cases}$

Կոորդինատային հարթության վրա պատկերել բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի կոորդինատները բավարարում են տրված անհավասարմանը (32-40).

32. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}\le 0:$ **33.** $\dfrac{|x|-|y+1|}{2x^2+3x-2}\ge 0:$ **34.** $y\ge\left|y^3+x^2y\right|:$

35. $\dfrac{1-xy}{x^2-y^2}\ge 0:$ **36.** $\dfrac{xy+1}{xy-1}\ge\dfrac{y+1}{y-1}:$ **37*.** $\cos 2x+\cos 2y\ge 0:$

38*. $\sin x>\sin y:$ **39*.** $[x]\le[y]:$ **40*.** $\{x\}\ge\{y\}:$

Գտնել կոորդինատային հարթության վրա այն պատկերի մակերեսը, որը տրվում է հետևյալ անհավասարությամբ (41-44).

41. $|x-3|+|y+2|\le 5:$ **42.** $2|x|+|y+2y+1|\le 5:$

43. $\left|y-x^2\right|+\left|y+x^2\right|\le 2(3-2x):$ **44.** $\left(x^2+y^2-x-y\right)\left(x^2+y^2-1\right)\le 0:$

45*. x և y թվերը բավարարում են $x^2+xy+4y^2\le 3$ պայմանին։ Գտնել $x+3y$ արտահայտության ամենամեծ արժեքը։

46*. x և y թվերը բավարարում են $x^2-6xy+y^2+21\le 0$ պայմանին: Գտնել $x+5y$ արտահայտության ամենափոքր արժեքը:

47*. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում անհավասարումների

$$\begin{cases} x\ge (y-a)^2, \\ y\ge (x-a)^2 \end{cases}$$

համակարգն ունի միակ լուծում

48*. Գտնել a պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում

$$\begin{cases} x^2+(a+4)x+4a\le y, \\ 3x+y-(2a+4)\le 0 \end{cases}$$

անհավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունը պարունակում է $A(-2;0)$ և $B(-1;0)$ ծայրակետերով հատվածը:

49*. $B(-3;2)$, $C(2;3)$, $D(3;-4)$ կետերը $ABCD$ զուգահեռագծի գագաթներն են: Գտնել a պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում՝

ա) A գագաթի կոորդինատները

$$\begin{cases} 2x-y-2a\le 0, \\ 2x+6y+5a\le 0 \end{cases}$$

համակարգի լուծում է,

բ) BD հատվածի գոնե մեկ կետի կոորդինատների թվազույգը այդ համակարգի լուծում է:

50*. Գտնել a պարամետրի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում

$$\begin{cases} 3x^2+11xy+10y^2=7, \\ x+y>0, \\ 4a^2x-3ay<0 \end{cases}$$

համակարգն ունի միակ լուծում:

§ 4. ՈՉ ՍՏԱՆԴԱՐՏ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Մինչև այժմ հիմնականում դուք առնչվել եք մեկ փոփոխականով հավասարումների (անհավասարումների) և այնպիսի հավասարումների համակարգերի հետ, որոնցում փոփոխականների և հավասարումների քանակները նույնն են եղել:

Այստեղ դիտարկելու ենք այնպիսի հավասարումներ և անհավասարումներ, որոնք պարունակում են երկու կամ երեք փոփոխականներ (անհայտներ), ինչպես նաև հավասարումների համակարգեր, որոնցում հավասարումների թիվը փոքր է փոփոխականների թվից: Պայմանավորվենք՝ այդպիսի հավասարումն (անհավասարումը, համակարգը) անվանել **ոչ ստանդարտ:** Նման խնդիրների լուծումը, հիմնականում, իրականացվում է յուրատիպ դատողությունների միջոցով:

Օրինակ 1: ***Լուծենք հետևյալ հավասարումը*** ՝

$$x^2+y^2+9=xy-3x-3y: \qquad (1)$$

Լուծում: Ունենք՝

$$(1)\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+18-2xy+6x+6y=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2+6x+9)+(x^2+6y+9)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x+3)^2+(y+3)^2=0:$$

Վերջին հավասարման ձախ մասը ոչբացասական երեք թվերի գումար է: Այդ հավասարությունը կարող է ճիշտ լինել այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ երեք թվերից յուրաքանչյուրը հավասարվում է զրոյի: Նշանակում է, որ (1) հավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+3=0, \\ y+3=0 \end{cases}$$

հավասարումների համակարգին, որի միակ լուծումն է՝ $(-3;\, 3)$, որը և տրված հավասարման միակ լուծումն է:

Օրինակ 2: ***Լուծենք հետևյալ հավասարումը՝***

$$4^{\sin x}-2^{1+\sin x}\cos(xy)+2^{|y|}=0\,: \tag{2}$$

Լուծում: Առաջին եղանակ: $2^{\sin x}=t$ փոփոխականի փոխարինումով (2) հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$t^2-2\cos(xy)t+2^{|y|}=0,$$

որը կարելի է դիտարկել որպես քառակուսային հավասարում t-ի նկատմամբ: Այդ հավասարումը լուծում կունենա այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա տարբերիչը ոչբացասական է, այսինքն՝

$$\cos^2(xy)-2^{|y|}\geq 0,$$

որտեղից՝

$$\cos^2(xy)\geq 2^{|y|}\,: \tag{3}$$

Մյուս կողմից, ցանկացած x և y թվերի համար ունենք՝

$$\cos^2(xy)\leq 2, \qquad \text{իսկ } 2^{|y|}\geq 2^0=1,$$

նշանակում է՝ (3) անհավասարությունը կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\cos^2(xy)=1 \quad \text{և} \quad 2^{|y|}=1\,:$$

Արդյունքում կունենանք հավասարումների համակարգերի հետևյալ համախումբը՝

$$\begin{cases}\cos(xy)=-1,\\ 2^{|y|}=1,\\ t^2-2\cos(xy)t+2^{|y|}=0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos(xy)=1,\\ 2^{|y|}=1,\\ t^2-2\cos(xy)t+2^{|y|}=0,\end{cases}$$

որի լուծումներն են՝

$$\begin{cases}x\in R,\\ y=0,\\ t=-1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x\in R,\\ y=0,\\ t=1\,:\end{cases}$$

Հաշվի առնելով $t=2^{\sin x}$ նշանակումը, համոզվում ենք, որ առաջին համակարգը լուծում չունի, իսկ երկրորդ համակարգից ստանում ենք՝

$$\begin{cases} x = \pi n, \ \ n \in Z, \\ y = 0 : \end{cases}$$

Երկրորդ եղանակ: Կատարենք որոշ ձևափոխություններ՝

$$(2) \Leftrightarrow \left(4^{\sin x} - 2 \cdot 2^{\sin x} \cos(xy) + \cos^2(xy)\right) + \left(2^{|y|} - \cos^2(xy)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{\sin x} - \cos(xy)\right)^2 + \left(2^{|y|} - \cos^2(xy)\right) = 0 : \qquad (4)$$

Քանի որ ցանկացած x և y թվերի համար

$$2^{|y|} \geq 1 \geq \cos^2(xy),$$

նշանակում է՝

$$2^{|y|} - \cos^2(xy) \geq 0 :$$

Հետևաբար, (4) հավասարումը (ուստի նաև (2)-ը) համարժեք է

$$\begin{cases} 2^{\sin x} - \cos(xy) = 0, \\ 2^{|y|} - \cos^2(xy) = 0 \end{cases}$$

համակարգին, որն էլ, վերն արված նկատառումների շնորհիվ, համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} 2^{\sin x} = \cos(xy), \\ 2^{|y|} = 1, \\ \cos^2(xy) = 1 : \end{cases}$$

Այս համակարգն էլ իր հերթին համարժեք է համակարգերի հետևյալ համախմբին՝

$$\begin{cases} 2^{\sin x} = 1, \\ 2^{|y|} = 1, \\ \cos(xy) = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^{\sin x} = -1, \\ 2^{|y|} = 1, \\ \cos(xy) = -1, \end{cases}$$

որտեղից էլ կստանանք՝ $x = \pi n, \ n \in Z, \ \ y = 0 :$

Պատասխան՝ $(\pi n; \ 0), n \in Z :$

Օ ր ի ն ա կ 3: ***Լուծենք***

$$2^{tg^2xy+ctg^2xy}=\frac{4}{\log_2\left(4x^2-4x+3\right)}$$

հավասարումը:

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Գնահատենք հավասարման աջ և ձախ մասերը:

Օգտվելով $a+\frac{1}{a}\geq 2\ (a>0)$ հայտնի անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝

$$2^{tg^2xy+ctg^2xy}=2^{tg^2xy+\frac{1}{tg^2xy}}\geq 2^2=4:$$

Մյուս կողմից՝

$$\frac{4}{\log_2\left(4x^2-4x+3\right)}=\frac{4}{\log\left((2x-1)^2+2\right)}\leq\frac{4}{\log_2 2}=4,$$

քանի որ $\log_2\left((2x-1)^2+2\right)\geq\log_2 2=1$ ($\log_2 t$ ֆունկցիան աճող է):

Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ տրված հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ աջ և ձախ մասերը միաժամանակ հավասարվում են 4-ի.

$$\begin{cases}2^{tg^2xy+ctg^2xy}=4,\\ \dfrac{4}{\log_2\left(4x^2-4x+3\right)}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}tg^2xy+\dfrac{1}{tg^2xy}=2,\\ (2x-1)^2+2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}tg^2xy=1,\\ (2x-1)^2=0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}\ (n\in Z),\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\ (n\in Z):\end{cases}$$

Պատասխան՝ $\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\mid n\in Z\right\}:$

Օրինակ 4: ***Լուծենք հետևյալ անհավասարումը***՝

$$x+y^2+\sqrt{x-y^2-1}\le 1: \qquad (5)$$

Լուծում: Այս անհավասարման ԹԱԲ-ը որոշվում է հետևյալ պայմանով՝ $x\ge y^2+1$, որից, ակնհայտորեն, հետևում է, որ $x\ge 1$: Այժմ գնահատենք (5) անհավասարման ձախ մասը: Քանի որ $x\ge 1$, $y^2\ge 0$ և $\sqrt{x-y^2-1}\ge 0$, ուստի $x+y^2+\sqrt{x-y^2-1}\ge 1$:

Վերջին անհավասարությունից էլ եզրակացնում ենք, որ (5) անհավասարման մեջ կարող է տեղի ունենալ միայն հավասարության դեպք, այսինքն՝

$$(5)\Leftrightarrow x+y^2+\sqrt{x-y^2-1}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ y^2=0,\\ \sqrt{x-y^2-1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=0:\end{cases}$$

Պատասխան՝ $(1;\ 0)$:

Օրինակ 5: ***Լուծենք հետևյալ համակարգը***՝

$$\begin{cases}tg^2x+ctg^2x=2\sin^2 y,\\ \sin^2 y+\cos^2 z=1:\end{cases} \qquad (6)$$

Լուծում: Համակարգի առաջին հավասարման ձախ մասը, որպես փոխհակադարձ դրական թվերի գումար, փոքր չէ 2-ից, իսկ աջ մասը՝ մեծ չէ 2-ից: Դրա համար էլ համակարգի առաջին հավասարումը համարժեք է հավասարումների հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases}tg^2x+ctg^2x=2,\\ 2\sin^2 y=2:\end{cases}$$

Հետևաբար, (6) համակարգը համարժեք է երեք անհայտով երեք հավասարումների հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} tg^2x + ctg^2x = 2, \\ \sin^2 y = 1, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 : \end{cases} \qquad (7)$$

Դժվար չէ հասկանալ, որ

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases} tg^2x = 1, \\ \sin^2 y = 1, \\ \cos^2 z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, \ k \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z, \\ z = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, \ m \in Z : \end{cases}$$

Պատասխան ՝ $\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}; \ \dfrac{\pi}{2} + \pi n; \ \dfrac{\pi}{2} + \pi m\right), \ k \in Z, n \in Z, m \in Z :$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Լուծել հավասարումը (1-29).

1. $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 7 = 0 :$

2. $2\sqrt{2}(x + 2y) = x^2 + y^2 + 10 :$

3. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x + 6y + 18 = 0 :$

4. $x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 2yz + 2z + 1 = 0 :$

5. $(x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) = 6 :$

6. $2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1 :$

7. $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 1} = 2 + (x - y)^2 :$

8. $\dfrac{36}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{4}{\sqrt{y-1}} + 4\sqrt{x-2} + \sqrt{y-1} = 28 :$

9. $\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{y^2}+8x^2+27y^2=26$:

10. $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}+\dfrac{4(y-1)\cdot\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}=10$:

11. $\sqrt{1-x+y^2}+\sqrt{x^2+y+4}=\sqrt{3x-y}$:

12. $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy$:

13. $\sin^4 x+\cos^4 y+2=4\sin x\cos y$:

14. $x^2+4x\cos(xy)+4=0$:

15. $x^2+2x\sin(xy)+1=0$:

16. $\cos^2 x+\cos x\cos y+\cos^2 y=0$:

17. $tg^2x+2tgx(\sin y+\cos y)+2=0$:

18. $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos y=3+\cos 2y$:

19. $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\dfrac{3}{2}$:

20. $2+2\sin x(\sin y+\cos y)=\cos 2x$:

21. $1-2x-x^2=tg^2(x+y)+ctg^2(x+y)$:

22. $tg^4x+tg^4y+2ctg^2xctg^2y=3+\sin^2(x+y)$:

23. $3^{|x|}+\lg(1+x^2+|y|)=\cos y$:

24. $(3\sin x+\sqrt{3}\cos x+5y)^2=37(1+y^2)$:

25. $5^{tg^2(xy)+ctg^2(xy)}=\dfrac{25}{\log_2(4x^2-4x+3)}$:

26. $\dfrac{|ctgxy|}{\cos^2 xy}=\log_{\frac{1}{3}}\left(y^2-2y+\dfrac{10}{9}\right)$:

27. $4\sin^2(xy)+4\sin(xy)+1=\dfrac{4}{\ln|y|+\log_{|y|}e}$:

28. $x^{\sin y}+(1-x)^{\cos y}=1$:

29. $\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)(1+tg^2 2y)(3+\sin 3z)=4$:

Լուծել համասարումների համակարգը (30-38).

30. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx, \\ x^2y+y^2z+z^2x=81 : \end{cases}$

31. $\begin{cases} 10x^2+5y^2+13z^2=12xy+4xz+6yz, \\ x^3+y^3+z^3=288 : \end{cases}$

32. $\begin{cases} zx=y+2, \\ x+z=2\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\right): \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=6 : \end{cases}$

34. $\begin{cases} \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)=9, \\ x+y^3+z^5=42 : \end{cases}$

35*. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+z\sqrt{x}=3\sqrt{xyz}, \\ x+y+z=15 : \end{cases}$

36*. $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz, \\ x + y + z = -6 : \end{cases}$

37*. $\begin{cases} (x + 2y + 3z)^2 = 14\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \\ x + y + z = 12 : \end{cases}$

38*. $\begin{cases} 2^{1+\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 4\cos^2 y, \\ \log_{0,5} \sin z + \sin^2 y = 1 : \end{cases}$

Գտնել բոլոր այն $(x,\ y)$ բնական թվազույգերը, որոնք բավարարում են տվյալ հավասարությանը (39,40).

39*. $x^2 + 3xy + 2x - 3y = 26 :$

40*. $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100 :$

Գտնել ամբողջ թվերի բոլոր $(x,\ y,\ z)$ եռյակները, որոնցից յուրաքանչյուրի համար տեղի ունի տրված հավասարությունը (41, 42).

41*. $3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33;$

42*. $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30 :$

43*. Լուծել համակարգը բնական թվերի բազմության մեջ.

$$\begin{cases} xy + zt = 34, \\ xz - yt = 19 : \end{cases}$$

Լուծել անհավասարումը (44-53).

44. $x - |y| - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq 1 :$

45. $\left|\log_5 x + \log_x 5\right| + 2\cos y \leq 0 :$

46. $y-\sqrt{1-y-x^2}\geq \frac{1}{|\cos x|}$:

47. $\cos x - y^2 \geq \sqrt{y-x^2-1}$:

48. $2^y - 2\cos x + \sqrt{y-x^2-1} \leq 0$:

49. $2^{\cos x} + \sqrt{y^2+\frac{1}{|\cos x|}-1} \leq |y| + \frac{1}{2}$:

50. $(3-\cos^2 x - 2\sin x)(\lg^2 y + 2\lg y + 4) \leq 3$:

51. $\frac{\log_3\left(2+2^{|x|}\right)}{\cos^2(x+y)} \leq 1$:

52. $\pi y + 2\arcsin\left(x^2+y\right) \geq 2\pi$:

53. $\lg(1+y) + \arcsin\left(2^{|x|}+y\right) \geq \frac{\pi}{2}$:

54*. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում անհավասարությունը ճիշտ է ցանկացած x, y, z թվերի համար.

$$x^2+y^2+3z^2+2xz+2yz \geq a\left(x^2+y^2+z^2\right):$$

55*. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում անհավասարումը լուծում ունի.

$$y(3tgx-4y) < a\left(tg^2x+y^2\right):$$

§ 5. ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Նախնական պարզաբանումներ

Էքստրեմումային են կոչվում այն խնդիրները, որոնցում պահանջվում է որոշել, թե ինչ ամենամեծ կամ ամենափոքր արժեք կարող է ընդունել այս կամ այն մեծությունը: Երկրաչափական բնույթի այդպիսի խնդիրների լուծման համար կարելի է առանձնացնել երկու մոտեցում՝ երկրաչափական և անալիտիկ:

Նշենք, որ սույն գլխում ընդգրկված բոլոր խնդիրները լուծվում են տարրական եղանակով (առանց ածանցյալի կիրառության), ընդ որում, մեծի մասամբ անհրաժեշտ կլինի կիրառել հանրահաշվական հայտնի անհավասարություններ: Հարկ ենք համարում անդրադառնալ նաև այդ անհավասարություններին:

Ցանկացած ոչբացասական a **և** b թվերի **համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները** (1-3).

1) $a^2+b^2 \geq 2ab$: 2) $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$: 3) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$:

Այս անհավասարություններից յուրաքանչյուրում հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b$:

Դիտողություն: 1-3 անհավասարությունները ճիշտ են a-ի և b-ի ցանկացած իրական արժեքների դեպքում: Քանի որ երկրաչափական մեծությունների թվային արժեքները չեն կարող բացասական լինել, ուստի, այդ առումով էլ շեշտը դրվում է ոչբացասական a և b թվերի վրա:

4) **Ցանկացած դրական** a **-ի դեպքում ճիշտ է**

$$a+\frac{1}{a} \geq 2$$

անհավասարությունը: Հավասարության դեպք տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=1$:

5) Թվաբանական և երկրաչափական միջինների կապը:

Ցանկացած a և b **դրական թվերի համար ճիշտ է**

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

անհավասարությունը: Հավասարության դեպք տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b$:

Ընդհանրապես, **ցանկացած դրական** $a_1, a_2, ..., a_n$ **թվերի համար ճիշտ է**

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

անհավասարությունը (Կոշիի անհավասարություն): Այստեղ հավասարության նշան տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$a_1 = a_2 = ... = a_n:$$

Ելնելով դրական թվերի միջինների կապից (Կոշիի անհավասարությունից) կարելի է ձևակերպել երկու կարևոր թեորեմներ (հետևանքներ), որոնք կարող են օգտակար լինել մեծագույնի և փոքրագույնի վերաբերյալ շատ խնդիրներ լուծելիս:

Թեորեմ 1: **Եթե դրական** n **փոփոխականների գումարը հաստատուն է, ապա այդ փոփոխականների արտադրյալը կունենա մեծագույն արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր** n **գումարելիները միմյանց հավասար են:**

Այլ կերպ ասած, եթե $x_1 + x_2 + ... x_n = c$ (հաստատուն), ընդ որում $x_i > 0$ $(i=1,2,...,n)$, ապա $x \cdot x_2 \cdots x_n$ արտադրյալը կընդունի մեծագույն արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{c}{n}$: Այդ մեծագույն արժեքը հավասար է $\left(\dfrac{c}{n}\right)^n$:

Թեորեմ 2: **Եթե դրական n փոփոխականների արտադրյալը հաստատուն է, ապա նրանց գումարը կընդունի փոքրագույն արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր n արտադրիչները միմյանց հավասար են:**
Այլ կերպ ասած, եթե $x_1x_2...x_n = P$ (հաստատուն), ընդ որում $x_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, ապա $x_1 + x_2 + ... + x_n$ գումարը կընդունի փոքրագույն արժեք այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$x_1 + x_2 = ... = x_n = \sqrt[n]{p} :$$

Այդ փոքրագույն արժեքը հավասար է $n\sqrt[n]{p}$:

6) **Եթե $a > 0$, ապա x փոփոխականի ցանկացած արժեքի դեպքում** $f(x) = ax^2 + bx + c$ քառակուսային **ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմանին՝**

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \geq -\frac{D}{4a}, \quad \text{որտեղ } D = b^2 - 4ac :$$

Հետևանք: Եթե $a > 0$, ապա

$$\max(ax^2 + bx + c) = -\frac{D}{4a}, \text{ երբ } x = -\frac{b}{2a} :$$

7) Եթե $a > 0$, ապա x փոփոխականի ցանկացած արժեքի դեպքում

$$ax^2 + bx + c \leq -\frac{D}{4a} :$$

Հետևանք: Եթե $a < 0$, ապա

$$\max(ax^2 + bx + c) = -\frac{D}{4a}, \text{ երբ } x = -\frac{b}{2a} :$$

8) **Եթե f ֆունկցիան X միջակայքի ցանկացած x_1, x_2 և $a_1 + a_2 = 1$ պայմանին բավարարող ցանկացած** $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ թվերի համար բավարարում է

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) > a_1f(x_1) + a_2f(x_2) \ [\ (f(a_1x_1 + a_2x_2) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2)\ ]$$

պայմանին, ապա X միջակայքի կամայական $x_1, x_2, ..., x_n$ և $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ պայմանին բավարարող ցանկացած ոչ բացասական $a_1, a_2, ..., a_n$ թվերի համար տեղի ունի

[$f(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) > a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + ... + a_n f(x_n)$

համապատասխանաբար

$f(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) \leq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + ... + a_n f(x_n)$]:

Հ ե տ և ա ն ք ։ Եթե f ֆունկցիան այնպիսին է, որը X միջակայքի ցանկացած x_1 և x_2 թվերի համար բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը՝

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right),$$

ապա այդ միջակայքի ցանկացած $x_1, x_2, ..., x_n$ թվերի համար ճիշտ է նաև հետևյալ անհավասարությունը՝

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$$

(համապատասխանաբար,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}\right):$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը հավասար է 64 սմ, հիմքի մակերեսը՝ 16 սմ². Այդ զուգահեռանիստի ի՞նչ չափերի դեպքում նրա ծավալը կլինի ամենամեծը:

2. Ուղիղ զուգահեռանիստի հիմքը քառակուսի է: Նրա կողմնային նիստի պարագիծը հավասար է 54 սմ-ի: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի զուգահեռանիստի հիմքի կողմի երկարությունը, որպեսզի նրա ծավալը լինի ամենամեծը:

3. 36 մ³ տարողություն ունեցող բաց բաքն ունի ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ձև, որի հիմքի կողմերը հարաբերում են այնպես, ինչպես 1:2: Բաքի ի՞նչ չափերի դեպքում նրա մակերևույթի մակերեսը կլինի ամենափոքրը:

4. Պահանջվում է պատրաստել փակ արկղ, որի հատակը լինի քառակուսի, իսկ ծավալը 8 դմ³: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն արկղի գծային չափերը, որպեսզի նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը լինի ամենափոքրը:

5. Որոշել 32 մ³ ծավալ ունեցող քառակուսի հատակով բաց ավազանի չափերն այնպես, որպեսզի նրա պատերի և հիմքի պաստառապատման վրա ծախսվի ամենաքիչ քանակությամբ նյութ:

6. Պահանջվում է պատրաստել փակ արկղ, որի հիմքի մակերեսը 1 մ² է: Բոլոր կողերի երկարությունների գումարը պետք է հավասար լինի 20 մ: Գտնել այն արկղի չափերը, որի մակերևույթի մակերեսն ամենամեծն է:

7. Պահանջվում պատրաստել զուգահեռանիստի ձև ունեցող տուփ: Տուփի հատակի մակերեսը պետք է հավասար լինի 2 դմ², իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը 18 դմ²: Տուփի ի՞նչ չափերի դեպքում բոլոր կողերի երկարությունների գումարը կլինի ամենափոքրը:

8. Միևնույն լրիվ մակերևույթի մակերես ունեցող բոլոր ուղղանկյուն զուգահեռանիստերից գտնել այն, որն ունի ամենամեծ ծավալը:

9. Զուգահեռանիստերի բազմությունից, որոնց կողմնային նիստերի պարագծերը հավասար են 12 սմ և 18 սմ, որոշել այն զուգահեռանիստի ծավալը, որին կարելի է արտագծել ամենափոքր շառավղով գունդը:

10. Ողիղ եռանկյուն պրիզմային հիմքը կանոնավոր եռանկյուն է: Պրիզմայի կողմնային նիստի պարագիծը 42 սմ է: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի պրիզմայի հիմքի կողմի երկարությունը, որպեսզի նրա ծավալը լինի ամենամեծը:

11. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի ծավալը հավասար է 8 դմ^3: Գտնել այդպիսի պրիզմայի լրիվ մակերևույթի ամենափոքր մակերեսը, գիտենալով, որ պրիզմայի հիմքի կողմը կարող է ընդունել (1;4) միջակայքին պատկանող ցանկացած արժեք:

12. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի նիստի պարագիծը 12 սմ է: Պրիզմայի հիմքի կողմի ի՞նչ երկարության դեպքում նրա ծավալը կլինի ամենամեծը:

13. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի նիստի պարագիծը 6 սմ է: Պրիզմայի հիմքի կողմի ի՞նչ երկարության դեպքում նրա ծավալը կլինի ամենամեծը:

14. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմի և բարձրության երկարությունների գումարը 9 սմ է: Բուրգի հիմքի կողմի ի՞նչ երկարության դեպքում նրա ծավալը կլինի ամենամեծը:

15. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բարձրության և հիմքի կողմի երկարությունների գումարը 6 սմ է: Բուրգի հիմքի կողմի երկարության ի՞նչ արժեքի դեպքում նրա ծավալը կլինի ամենամեծը:

16. Քառանիստի մի զույգ հակադիր կողերից յուրաքանչյուրի երկարությունը x է. իսկ մյուս կողերից յուրաքանչյուրը՝ 1: x-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում այդ քառանիստի ծավալը կլինի ամենամեծը:

17. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բոլոր կողերի երկարությունների քառակուսիների գումարը հավասար է 30 սմ²: Հիմքի կողմի և կողմնային կողի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում այդ բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը կլինի ամենամեծը:

18. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի կողմնային կողի երկարությունը 1 սմ է: Հիմքի կողմի ինչպիսի՞ երկարության դեպքում բուրգի ծավալը կլինի ամենամեծը:

19. $SABCD$ բուրգի հիմքը $ABCD$ ուղղանկյունն է, $AB = 6BC$. SD-ն այդ բուրգի բարձրությունն է և $SD + BC = 15$ սմ: Գտնել BC հատվածի երկարությունը, որի դեպքում բուրգի ծավալը ամենամեծն է:

20. $SABCD$ կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային նիստի մակերեսը հավասար 8 սմ², իսկ AB հատվածը կարող ընդունել (1;5) հատվածի ցանկացած արժեք: Գտնել բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե AB հատվածի և բուրգի հարթագծի երկարությունների գումարն ամենամեծն է:

21. Գլանների բազմությունից, որոնցից յուրաքանչյուրի բարձրության և առանցքային հատույթի անկյունագծի գումարը հավասար է a-ի, գտնել այն գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, որն ունի ամենամեծ ծավալը:

22. Տրված $V = 2\pi$ ծավալ ունեցող բոլոր գլաններից գտնել այն, որի լրիվ մակերևույթի մակերեսն ամենափոքրն է:

23. Գլանի առանցքային հատույթի պարագիծը հավասար է 16 սմ, իսկ հիմքի տրամագիծը կարող է ընդունել (1;5) միջակայքին պատկանող ցանկացած արժեք. Գտնել այն գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, որն ունի առանցքային հատույթի ամենամեծ մակերեսը:

24. Գտնել գլանի բարձրության և հիմքի շառավղի հարաբերությունը, որը տրված ծավալի դեպքում ունի լրիվ մակերևույթի ամենափոքր մակերեսը:

25. Տրված լրիվ մակերևույթի S մակերես ունեցող բոլոր կոներից գտնել այն, որն անի ամենամեծ ծավալը:

26. Տրված V ծավալ ունեցող բոլոր կոներից գտնել այն, որն ունի կողմնային մակերևույթի ամենափոքր մակերեսը:

27. $4\sqrt{3}$ սմ ծնորդ ունեցող բոլոր կոներից գտնել այն, որի ծավալն ամենամեծն է:

28. Գտնել կոնի բարձրության և հիմքի շառավղի հարաբերությունը, որը տրված ծավալի դեպքում ունի լրիվ մակերևույթի ամենափոքր մակերեսը:

29. Կոնի առանցքային հատույթի պարագիծը հավասար է 8 դմ: Գտնել կոնի հիմքի շառավիղն ու բարձրությունը, որոնց դեպքում նրա ծավալը կլինի ամենամեծը:

30. Կոնի բարձրությունը 3 սմ է. իսկ հիմքի շառավիղը 1 սմ: Կոնի հիմքի հարթությունից ի՞նչ հեռավորության վրա պետք է տանել հիմքին զուգահեռ հարթություն, որպեսզի կոնի հատույթը որպես հիմք և կոնի հիմքի կենտրոնը գագաթ ունեցող նոր կոնի ծավալը լինի ամենամեծը:

31. Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի հիմքը քառակուսի է: Նրա վերին հիմքի վրա կառուցված է նույն հիմքով քառանկյուն բուրգ, որի նիստերը կանոնավոր եռանկյուններ են: Այդ պատկերի ծավալը հավասար է $\dfrac{3+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$ սմ^3: Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի հիմքի կողմի ի՞նչ արժեքի դեպքում այդ պատկերի լրիվ մակերևույթի մակերեսը կլինի ամենափոքրը:

32. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմաների բազմությունից, որոնցից յուրաքանչյուրի կողմնային նիստի պարագիծը հավասար է 14 սմ, որոշել այն պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, որին կարելի է արտագծել ամենափոքր շառավղով գունդ:

33. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է 6 սմ, իսկ բարձրությունը՝ 9 սմ: Այդ բուրգին ներգծված է կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա (վերին հիմքի գագաթները գտնվում են բուրգի կողմնային կողերի վրա, իսկ ստորին հիմքի գագաթները՝ բուրգի հիմքի վրա): Գտնել այն պրիզմայի բարձրությունը, որի ծավալն ամենամեծն է:

34. Հիմքի a կողմով և h բարձրությամբ կանոնավոր քառանկյուն բուրգին ներգծված է կանոնավոր քառանկյուն պրիզմա այնպես, որ նրա ստորին հիմքը գտնվում է բուրգի հիմքի վրա: Գտնել նշված պայմաններին բավարարող այն պրիզմայի հիմքի կողմի երկարությունն ու բարձրությունը, որի կողմնային մակերևույթի մակերեսն ամենամեծն է:

35. Տրված գլանին ներգծած բոլոր ուղղանկյուն զուգահեռանիստերից գտնել այն, որն ունի ամենամեծ ծավալը:

36. Տրված R շառավիղն ունեցող գնդային մակերևույթին ներգծած բոլոր ուղղանկյուն զուգահեռանիստերից գտնել այն, որն ունի ամենամեծ ծավալը:

37. Կոնին, որի հիմքի շառավիղը հավասար է 6 սմ, իսկ բարձրությու-նը՝ 15 սմ, ներգծած է գլան, որն ունի լրիվ մակերևույթի ամենամեծ մակերեսը: Գտնել գլանի ծավալը:

38. Գլանը վերևից լրացված է նույն շառավղով կիսագնդով: Այդ մար-մնի ծավալը հավասար է 45π սմ³: Գլանի հիմքի շառավղի ի՞նչ արժեքի դեպքում այդ մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը կլինի ամենափոքրը:

39. Տրված R շառավիղն ունեցող գնդային մակերևույթին ներգծած զուգահեռանիստերից գտնել այն, որն ունի լրիվ մակերևույթի ամենամեծ մակերեսը:

40. R շառավղով գնդային մակերևույթին ներգծված է կոն: Այդ կոնե-րից գտնել այն, որի ծավալն ամենամեծն է:

41. R շառավղով գնդային մակերևույթին ներգծված բոլոր կոներից գտնել այն, որի կողմնային մակերևույթի մակերեսն ամենամեծն է:

42. Կոնին, որի հիմքի շառավիղը 2 սմ է, իսկ բարձրությունը՝ 6 սմ, ներգծված բոլոր գլաններից գտնել այն, որի լրիվ մակերևույթի մակերեսն ամենամեծն է.

43*. Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի կողերի երկարություններն են a, b և c: Ինչի՞ է հավասար այդ զուգահեռանիստի ուղղանկյուն պրոյեկցիայի ամենամեծ մակերեսը հարթության վրա:

44*. Տրված է 1 երկարությամբ կողով $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: AA_1 ուղղի վրա վերցված է M կետը, իսկ BC ուղղի վրա՝ N կետն այնպես, որ MN ուղիղը հատում է C_1D_1 կողը: Գտնել MN հատվածի երկարության ամենափոքր արժեքը:

45*. Ապացուցել, որ տրված հիմքով և միատեսակ բարձրություններով բուրգերից կողմնային մակերևույթի մակերեսի ամենափոքր արժեքն ունի այն բուրգը, որի գագաթը պրոյեկտվում է հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնում:

§ 6. ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՏԱՐԱՏԵՍԱԿ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ

Դպրոցական դասընթացում դիֆերենցիալ հաշվի ներմուծմամբ սովորողներն իրենց «ձեռքի տակ» ունենում են այնպիսի հզոր զենք, որի միջոցով «տարրական մաթեմատիկայի» տարբեր բաժինների բավականին բարդ խնդիրներ լուծվում են առանց դժվարության:

Ածանցյալի կիրառմամբ խնդիրների լուծումը հաջողությամբ իրականացնելու համար սովորողներին հարկ կլինի նախապես գիտենալ.

1) ածանցյալի սահմանումը,

2) ածանցման հիմնական կանոնները,

3) տարրարկան ֆունկցիաների ածանցյալները,

4) բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը,

5) $sinx < x < tgx\left(0 < x < \pi / 2\right)$ անհավասարությունը,

6) ֆունկցիաների մոնոտոնության և էքստրեմումների վերաբերյալ բոլոր սահմանումները և այն թեորեմները, որոնք կապված են ածանցյալի հետ:

Ինչպես նշվեց վերևում, ածանցյալի միջոցով ուսուցանվում են ընդհանուր մեթոդներ, որոնցով սովորողներին հնարավորություն է տրվում ազատորեն կատարել զանազան ֆունկցիաների հետազոտումներ՝ մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումները, ինչպես նաև մեծագույն և փոքրագույն արժեքները գտնելու ուղղությամբ:

Նույնիսկ դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացում ածանցյալի կիրառությունը չի սահմանափակվում էքստրեմալային հարցերի քննարկումներով: Բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի դասարաններում կարելի է ընդլայնել ածանցյալի կիրառությունները՝ տարատեսակ օգտակար ու կիրառական խնդիրներ լուծելու համար:

Երբեմն հարկ է լինում որոշել տրված հավասարման արմատների քանակը: Այդպիսի խնդիրներ լուծելիս շատ դեպքերում տարրական մեթոդներով չի հաջողվում հասնել նպատակին: Այդ դեպքում «օգնության է գալիս» ածանցյալը:

Սկսած 8-րդ դասարանից, հանրահաշվի դասընթացում սովորողները բազմիցս առնչվել են անհավասարությունների ապացուցման հետ: Հատկապես բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի դասընթացներում ներմուծվում ու ապացուցվում են հայտնի շատ անհավասարություններ, որոնց կիրառմամբ էլ բազմաթիվ անհավասարություններ են ապացուցվում: Քիչ չեն նաև մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցվող անհավասարությունները: Սակայն գոյություն ունեն բազմաթիվ կիրառություններ ունեցող հայտնի և հետաքրքիր անհավասարություններ, որոնց ապացուցման համար տարրական մեթոդների կիրառումը կա՛մ մեծ դժվարությունների է հանգեցնում կա՛մ ապարդյուն է դառնում: Նման դեպքերում ևս անհրաժեշտություն է առաջանում դիմել ածանցյալին, որի միջոցով էլ հիմնականում հաջողությամբ են լուծվում այդպիսի խնդիրները: Այսպես, օրինակ, որպեսզի ապացուցել $f(x) \ge 0$ անհավասարությունը $[0;\infty)$ միջակայքում, բավական է ապացուցել, որ այդ միջակայքում $f'(x) \ge 0$ և $f(0) \ge 0$:

Հաջողությամբ ընտրված ֆունկցիայի միջոցով կարելի է ապացուցել թվային այնպիսի անհավասարություններ, որոնք հնարավոր չէ ապացուցել տարրական մեթոդներով:

Օրինակ, $e^{\pi} > \pi^{e}$, $\sqrt{6}^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{\sqrt{6}}$ անհավասարություններն ապացուցելու համար հարմար է ընտրել $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ֆունկցիան և այն դիտարկել մոնոտոնության առումով:

Շատ գումարներ հեշտությամբ են հաշվվում ածանցյալի միջոցով՝ հիմքում ունենալով հայտնի գումարներ կամ այնպիսի գումարներ, որոնք հեշտությամբ են հաշվվում տարրական մեթոդներով: Այդպիսի գումարների հաշվումը ևս դժվարություններ կարող են առաջացնել ածանցյալից չօգտվելու դեպքում:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Քանի՞ արմատ ունի հավասարումը (1-11).

1. $x^3-3x^2+4x-25=0$:

2. $x^5-10x^3+45x-17=0$:

3. $x^3+3x^2-45x+80=0$:

4. $3x^4+4x^3-24x+18=0$:

5. $2x^3-8x+1=0$:

6. $3x^4-4x^3-2=0$:

7. $e^x=x+1$:

8. $e^x=2x^2$:

9. $2^x=4x$:

10. $10^{x-1}=x$:

11. $2e^x+x^2+18x-6=0$:

Գտնել հավասարման արմատների քանակը՝ կախված a պարամետրից (12-17).

12. $x^3-3x^2=a$:

13. $x^3+1=ax$:

14. $\ln x=ax$:

15. $e^x=ax$:

16. $x^2e^x=a$:

17. $\ln x=ax^2$:

18. Պարզել, թե b պարամետրի ի՞նչ արժեքի դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $a>0$ թիվ, որ $2a\ lnx=x^2+b$ հավասարումն ունենա միակ արմատ:

Ապացուցել անհավասարությունը (19-36).

19. $x^2-x^3<\dfrac{1}{6}\quad\left(x\geq\dfrac{2}{3}\right)$:

20. $e^x\geq ex$:

21. $e^x\geq x+1$:

22. $ln(1+x)\leq x\quad(x\geq 0)$:

23. $ln(1+x)>\dfrac{x}{(x+1)}\quad(x>0)$:

24. $e^x>1+ln(1+x)$:

25. ա) $x^y > y^x$, եթե $0 < y < e$, բ) $x^y < y^x$, եթե $e < x < y$:

26. $(1+x)^p \le 1+px \quad (0 \le p \le 1, x \ge 0)$

27. $(1+x)^p \ge 1+px \quad (p \ge 1,\ x \ge 0)$

28. $cosx \ge 1-\frac{x^2}{2}$:

29. $sinx \ge \frac{2}{\pi}x \ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$:

30. $tgx > x+\frac{x^3}{3}$:

31. $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$:

32. $sinx+tgx > 2x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$:

33. $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$ $(0 < y < x)$:

34. $\frac{x\ln x + y\ln y}{x+y} > \ln\frac{x+y}{2}$ $(x >, y > 0)$:

35. $x^\alpha - 1 \le \alpha(x-1)$ $(x > 0, 0 \le \alpha \le 1)$:

36. $x^a y^b \le ax + by$, որտեղ $x > 0, y > 0, a \ge 0, b \ge 0$ և $a + b = 1$:

Ո՞ր թիվն է մեծ (37-42).

37. 40^{41} թե՞ 41^{40}:

38. 2016^{2017} թե՞ 2017^{2016}:

39. $2{,}01^{2,02}$ թե՞ $2{,}02^{2,01}$

40. $\pi^{3,14}$ թե՞ $3{,}14^{\pi}$:

41*. $\frac{2}{201}$ թե՞ $\ln\frac{101}{100}$:

42*. 100^{199} թե՞ $99^{99}\cdot 101^{100}$:

Ապացուցել թվային անհավասարությունը (43-47).

43. $e^3 > 3^e$:

44. $e^{6-e} < 27$:

45. $\cos\frac{1}{10} > \frac{199}{200}$:   **46.** $e^{0.01} > 1,01$:

47. $\frac{1}{50} < \sin\frac{\pi}{100} < \frac{1}{25}$:

48*. Ապացուցել, որ ցանկացած $n > 1$ բնական թվի դեպքում

$$2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \ldots + n\sqrt[n]{x} \le (n-1)x + \frac{n(n-1)}{2} :$$

49*. Ապացուցել **Գյոլդերի անհավասարությունը**՝

եթե $x_i \ge 0,\ y_i \ge 0 \quad (i = 1,2,3\ldots,n)$, $a > 0$, $b > 0$ և $a + b = 1$, ապա

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \le \left(x_1^{\frac{1}{a}} + x_2^{\frac{1}{a}} + \ldots + x_n^{\frac{1}{a}}\right)^a \left(y_1^{\frac{1}{b}} + y_2^{\frac{1}{b}} + \ldots + y_n^{\frac{1}{b}}\right)^b :$$

* * *

50. Օգտվելով երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից, հաշվել

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

գումարը: Այնուհետև, կիրառելով ածանցյալը, ստացված հավասարությունից արտածել բանաձև հետևյալ գումարի համար՝

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} :$$

Գտնել բանաձև տրված գումարի համար (51-55).

51. $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$:

52. $1\cdot 2 + 2\cdot 3x + \ldots + n(n+1)x^{n-1}$:

53. $1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)x^{2n-2}$:

54. $1 - 5x^4 + 9x^8 + \ldots + (-1)^{n-1}(4n-3)x^{4n-4}$:

55. $1^2 + 3^2x^2 + 5^2x^4 + \ldots + (2n-1)^2x^{2n-2}$:

56. Արտածել բանաձև $S_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$ գումարի համար:

Ցուցում: Օգտվելով $2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ բանաձևից պարզեցնել $2\sin\frac{x}{2} \cdot S_n$ արտահայտությունը:

Օգտվելով նախորդ առաջադրանքի արդյունքից, ածանցյալի միջոցով արտածել բանաձև տրված գումարի համար (57-59).

57. $\cos x + 2\cos 2x + ... + n\cos nx$:

58. $\sin x + 2^2\sin 2x + ... + n^2\sin nx$:

59. $\cos x + 2^3\cos 2x + ... + n^3\cos nx$:

60. Արտածել բանաձև հետևյալ գումարի համար՝

$$S_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx :$$

Ցուցում: Սկզբում հաշվել $2\sin\frac{x}{2} \cdot S_n$ արտահայտությունը:

Օգտվելով նախորդ արաջադրանքի արդյունքից, ածանցյալի կիրառմամբ արտածել բանաձև տրված գումարի համար (61-63).

61. $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x ... + n\sin nx$:

62. $\cos x + 2^2\cos 2x + 3^2\cos 3x ... + n^2\cos nx$:

63. $\sin x + 2^3\sin 2x + ... + n^3\sin nx$:

64. Արտածել բանաձև հետևյալ արտադրյալի համար՝

$$P_n = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot ... \cdot \cos\frac{x}{2^n} :$$

Ցուցում: Պարզեցնել $2P_n \sin\dfrac{x}{2}$ արտահայտությունը՝ օգտվելով $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ բանաձևից:

Օգտվելով նախորդ առաջադրանքի արդյունքից, ածանցյալի կիրառմամբ արտածել բանաձև տրված գումարի համար (65, 66).

65*. $\dfrac{1}{2}tg\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}tg\dfrac{x}{4}+...+\dfrac{1}{2^n}tg\dfrac{x}{2^n}$:

66*. $\dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{x}{2}}+\dfrac{1}{16\cos^2\dfrac{x}{4}}+...+\dfrac{1}{2^{2n}\cos^2\dfrac{x}{2^n}}$, $x \neq \pi k\ (k \in Z)$:

§ 7 ԱՍՈՒՅԹՆԵՐ, ՊՆԴՈՒՄՆԵՐ

Նախնական տեղեկություններ

Որևէ իրադրություն նկարագրելու կամ մեկնաբանելու համար մարդն իր դատողություններն արտահայտում է որոշակի նախադասություններով, որոնցից շատերը ներկայացնում են այս կամ այն փաստի կամ օրինաչափության հաստատումը, հիմնավորումը, մեկ բառով՝ **պնդումը**: Պնդումները կարող են վերաբերել նաև առարկաների դասերին, այդ դեպքում պնդումն արտահայտվում է փոփոխականների միջոցով:

Ասույթ են անվանում ամեն մի պնդում, որի մասին իմաստ ունի ասել, որ այն ճշմարիտ է կամ՝ կեղծ: «Ասույթե բառի փոխարեն հաճախ գործածվում է «պնդումե արտահայտությունը: Բերենք ասույթների մի քանի օրինակ:

«29-ը պարզ թիվ է»,

«$\sqrt{47} > 7$»,

«Արմենը 15 տարեկան է»,

«Արշակը լողորդ է»,

«Վարունգը բանջարեղեն է»,

«Գայլն ընտանի կենդանի է»,

«Փարիզը Հունգարիայի մայրաքաղաքն է» և այլն:

Կարճության համար ասույթն ամբողջությամբ նշանակվում է լատինական այբուբենի որևէ գլխատառով՝ A, B, C, ... :

Ունենալով որևէ P ասույթ, կարելի է կազմել նոր ասույթ՝ P ասույթի ***ժխտում***: Այն նշանակվում է $\overline{P}$-ով (կարդում են *«P* գծիկով», կամ՝ ոչ P *),* որը ճշմարիտ է, եթե P ասույթը կեղծ է, և՝ հակառակը, կեղծ է, եթե P-ն ճշմարիտ է:

Օրինակներ . 1) եթե $P =$«119-ը պարզ թիվ է», ապա $\overline{P}$ = {119-ը պարզ թիվ չէ»:

2) եթե $q =$« $ABCD$ քառանկյան յուրաքանչյուր անկյունը փոքր է 110 °-ից», ապա

$\overline{q}$ =« $ABCD$ քառանկյան անկյուններից գոնե մեկը փոքր չէ 110 °-ից»,

3) եթե A =«Հռոմն Իտալիայի մայրաքաղաքը չէ», ապա $\overline{A}$ = «Հռոմն Իտալիայի մայրաքաղաքն է»,

4) եթե B = «Արշավախմբի մասնակիցներից յուրաքանչյուրի տարիքը չի գերազանցում 40-ը», ապա $\overline{B}$ = «Արշավախմբում կա մարդ, որի տարիքը 40-ից մեծ է»:

Ունենալով երկու (կամ ավելի) ասույթներ, նրանց միավորմամբ կարելի է կազմել բարդ ասույթներ՝ գործածելով, այսպես կոչված, տրամաբանական կապեր «ոչ» նախածանցը, «և», «կամ» շաղկապները, «եթե..., ապա...», «այն և միայն այն դեպքում...» բառակապակցությունները[7]:

Դպրոցական մաթեմատիկայի դասընթացում ներառված թեորեմները և ապացուցման խնդիրները ճշմարիտ պնդումներ են: Թեորեմների ձևակերպումներն ունեն **«Եթե..., ապա...»** տեսքը, իսկ ապացուցման խնդիրները **«Ապացուցել, որ...»** տեսքը:

Սովորողների մտավոր զարգացման և, ընդհանրապես, մաթեմատիկական գիտելիքների և կուլտուրայի ձևավորման գործում օգտակար դեր կարող են տանել այսպիսի ձևակերպումներով խնդիրները.

«Ճ՞իշտ է, արդյոք, հետևյալ պնդումը՝ ...»,

«Հիմնավորել կամ հերքել պնդումը՝...»,

որոնցում ձևակերպված պնդումները կարող են լինել ինչպես ճշմարիտ, այնպես էլ՝ ոչ ճշմարիտ: Օգտակար են նաև այսպիսի տեքստերով խնդիրները.

«Գոյություն ունի՞, արդյոք,...»,

«Հնարավո՞ր է ընտրել...»:

Այդպիսի առաջադրանքները կատարելիս սովորողները գուշակում են համապատասխան ճշմարիտ պնդումը և փորձում հիմնավորել այն: Վերոնշյալ ձևակերպումներով առաջադրանքները սովորողների մոտ կարող են առավել հետաքրքրություն առաջացնել մաթեմատիկայի

---

[7] *Ասույթների վերաբերյալ տեսական տեղեկատվությունը զետեղված է ,Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր-11 (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)ե դասագրքի 3-րդ գլխում: Այդ նկատառումով էլ այստեղ տեսական նյութը չի ծավալվում:*

նկատմամբ, քանի որ նրանք սկսում են ինքնուրույն վերլուծություններ և բացահայտումներ անել:

Մաթեմատիկա ուսումնասիրելիս, հիմնականում, մենք գործ ենք ունենում մեկ կամ մի քանի փոփոխական պարունակող պնդումների հետ: Օրինակ, **«n^2+4n արտահայտության արժեքը բնական n-ի դեպքում բաժանվում է 4-ի»** պնդումը կախված է n փոփոխականից: Պարզ է, որ n-ի յուրաքանչյուր զույգ արժեքի դեպքում ստացվում է ճշմարիտ պնդում (ճշմարիտ ասույթ), իսկ ամեն մի կենտ արժեքի դեպքում՝ կեղծ պնդում (կեղծ ասույթ): Փոփոխական պարունակող «$P(x)$, $x \in M$ » նախադասությունը, ընդհանրապես ասած, ասույթ չէ: Սակայն, ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր ֆիքսված $x_0 \in M$ տարրի համար ստացված «$P(x_0)$» նախադասությունն ասույթ է: Օրինակ, **«Յանկացած $x \in N$ դեպքում x^3-5x արտահայտությունը բաժանվում է 6-ի»** պնդումը ասույթ չէ: Մասնավորաբար, $x=4$ արժեքի դեպքում ստացված **«34-ը բաժանվում է 6-ի»** պնդումն ասույթ է:

Դպրոցական դասագրքերում և խնդրագրքերում ավելի հաճախ հանդիպում են ճշմարիտ պնդումներ (թեորեմների կամ ապացուցման խնդիրների տեսքով): Սովորողի խնդիրն է՝ յուրացնել թեորեմների ապացուցումները և փորձել ինքնուրույն հաստատել ապացուցման խնդիրների բովանդակությունը ներկայացնող պնդումները:

Խնդիրը համեմատաբար այլ է գիտական հետազոտության մեջ: Այստեղ հետազոտողին անհրաժեշտ է լինում ձևակերպել պնդումներ, որոնց նա հանգում է ուսումնասիրությունների արդյունքում: Այդպիսի պնդումները կարող են լինել ինչպես ճշմարիտ, այնպես էլ ոչ ճշմարիտ:

Եթե չի հաջողվում հաստատել (ապացուցել) տվյալ պնդումը, ապա բնական է, որ պետք է առաջանա կասկած՝ գուցե այն ճշմարիտ չէ: Նման դեպքում փորձ է արվում հերքել համապատասխան պնդումը: Մաթեմատիկական յուրաքանչյուր թեորեմի մեջ խոսվում է ոչ թե մեկ օբյեկտի, այլ, հիմնականում, անվերջ բազմությամբ նմանատիպ օբյեկտների մասին: Օրինակ. **«Շրջանագծին ներգծված քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը հավասար է 180°-ի»** թեորեմի (ճշմարիտ պնդման) մեջ խոսվում է ոչ թե կոնկրետ, առանձին վերցված մեկ քառանկյան, այլ ցանկացած շրջանագծին ներգծված կամայական քառանկյան մասին (որոնք, ակնհայտորեն, անվերջ են)։ Այստեղ էական ենք համարում նշել հետևյալ հանգամանքը. եթե պնդման մեջ օգտագործվում է որևէ հասկացության ընդհանուր անվանումը (մեր օրինակում «շրջանագիծ» և «քառանկյուն»), ապա նկատի են առնվում այդ հասկացության ծավալի մեջ մտնող բոլոր օբյեկտները, թեև հնարավոր է, որ ձևակերպման մեջ **«բոլոր», «ցանկացած»** («կամայական») բառերը նշված չլինեն։ Թեորեմի ձևակերպման վերաբերյալ այս ըմբռնումը հիմք է տալիս կողմնորոշվելու, թե անհրաժեշտության դեպքում ինչպես կարելի է հաստատել որոշակի առանձնահատկությամբ ձևակերպված (բայց չապացուցված) պնդման անճշտությունը։

Կարևոր ենք համարում, որ սովորողների գիտակցության մեջ ամրապնդվի հետևյալ փաստը. **պնդումը համարվում է ճշմարիտ այն և միայն այն դեպքում, եթե այն ճշմարիտ է բոլոր (առանց բացառության) այն օբյեկտների համար, որոնց վերաբերում է տվյալ պնդումը**։ Եթե շատ (նույնիսկ անվերջ) դեպքերի համար պնդումը ճիշտ է, սակայն թեկուզ մեկ դեպքի համար այն տեղի չունի, ապա ձևակերպված պնդումը համարվում է կեղծ (սխալ)։ Հետևաբար, որպեսզի հերքենք ընդհանրական իմաստ ունեցող մաթեմատիկական որևէ պնդում, այսինքն, ցույց տանք, որ այն ճշմարիտ չէ, լիովին բավական է հաստատել նրա կեղծ լինելն առանձին վերցված մեկ մասնավոր դեպքի համար։ Այլ կերպ ասած, բավական է կառուցել հերքող մեկ օրինակ (հակաօրինակ)։ Նկատենք, որ վերևում բերված n փոփոխականով պնդումը ճշմարիտ չէ։ Իրոք, վերցնելով, օրինակ, $n=1$ արժեքը , ստանում ենք $n^2+4n=1^2+4\cdot 1=5$, որը չի բաժանվում 4-ի։

«Եթե p և q թվերը պարզ են, ապա $p+q$ թիվը բաղադրյալ է» պնդումը ճշմարիտ չէ, քանի որ, օրինակ, $p=2$ և $q=3$ արժեքների դեպքում ստացված ասույթը ճշմարիտ չէ։

Մարդիկ երկար ժամանակ համարում էին, որ բոլոր կարապները սպիտակ են։ Այդ պնդումը հերքվեց, երբ Ավստրալիայում հայտնաբերվեց սև կարապ։

Հերքվող օրինակի որոնումը հաճախ արժեքավոր է ոչ միայն այն բանի համար, որ այն սովորողներից պահանջում է ոչ ձևական, խելամիտ մոտեցում, այլ նաև նրանով, որ նրանց ստիպում է անցկացնել ինքնատիպ փորձարկում, որն էլ նպաստում է գործնական փորձի ձեռքբերմանը: Ցանկալի է, որ մաթեմատիկայի նկատմամբ հետաքրքրասիրություն ցուցաբերող աշակերտները որոշ չափով տեղեկանան նաև պնդումներին վերաբերող տրամաբանության տարրերին: Օրինակ, այսպիսի հակիրճ տեղեկություն:

Դիցուք, P -ն ինչ-որ օբյեկտների բազմություն է (օբյեկտները կարող են լինել թվեր, ծառեր, մարդիկ և այլ առարկաներ): Այդ բազմության ամեն մի օբյեկտը կարող է օժտված լինել կամ չլինել մի որոշ A հատկությամբ: Օրենքն այսպիսին է. **ճիշտ կարող է լինել կա'մ պնդումը, կա'մ նրա հերքումը** (բացառումը), այսինքն երկուսից մեկը, և միայն մեկը (տրամաբանության մեջ այն կոչվում է **երրորդի բացառման օրենք**): Ընդունվում է, որ դասընթացում գործածվող յուրաքանչյուր պնդում կա'մ ճշմարիտ է, կա'մ ոչ ճշմարիտ (կեղծ):

Կեղծ պնդումները հերքելու համար մենք, ըստ էության, օգտվում ենք ստորև բերված աղյուսակից, որը վերոհիշյալ դատողությունների հակիրճ ձևակերպումն է մաթեմատիկական «լեզվով»:

Պնդումը	Նրա բացառումը (հերքումը)
P -ի բոլոր օբյեկտներն օժտված են A հատկությամբ (P -ի ցանկացած օբյեկտ օժտված է A հատկությամբ):	P -ի գոնե մեկ օբյեկտ օժտված չէ A հատկությամբ: (Գոյություն ունի P -ի այնպիսի օբյեկտ, որն օժտված չէ A հատկությամբ):
P -ից որոշ օբյեկտներ օժտված են A հատկությամբ: (Գոյություն ունի P -ին պատկանող այնպիսի օբյեկտ, որն օժտված է A հատկությամբ):	P բազմության ոչ մի օբյեկտ օժտված չէ A հատկությամբ: (P բազմության ցանկացած օբյեկտ օժտված չէ A հատկությամբ:)

Մոլորություն կլինի կարծել, թե որևէ պնդման ճշմարիտ չլինելը կարելի է անմիջապես բացահայտել: Ինչպես թեորեմների ապացուցումը, այնպես էլ կեղծ պնդումների հերքումը պահանջում է վերլուծություններ և մտահանգումներ:

Ընդհանուր առմամբ, կեղծ պնդումները պայմանականորեն կարելի է բաժանել երկու խմբի.

ա) ***Ակնհայտ կեղծ պնդումներ.*** այդպես կանվանենք այն պնդումները, որոնց կեղծ լինելը բացահայտվում է անմիջական փաստական ստուգման միջոցով: *Օրինակներ:*

1) 34-ը բաժանվում է 4-ի;

2) 117-ը պարզ թիվ է;

3) $3^5 > 200$;

4) 1,08-ը մեծ է 1,001-ից;

5) 2-ը $x^2 + 3x = 8$ հավասարման արմատ է;

6) եթե եռանկյան երկու անկյունները 40° և 45° են, ապա այն բութանկյուն եռանկյուն է և այլն:

բ) ***Ոչ ակնհայտ կեղծ պնդումներ,*** այդպես կանվանենք այն պնդումները, որոնց կեղծ լինելը բացահայտվում է տրամաբանական մտահանգումների միջոցով:

Ոչ ակնհայտ կեղծ պնդումներից առանձնահատուկ հետաքրքրություն են ներկայացնում հատկապես այն պնդումները, որոնք առաջին հայացքից թվում են ճշմարտանման և նրանց կեղծ լինելն ունի քողարկված և խաբուսիկ բնույթ: Բերենք լուսաբանող օրինակներ:

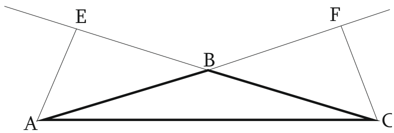
Օրինակ 1. Բնական թվերի շարքում հնարավոր չէ ընտրել միմյանց հաջորդող երկու հազար թվեր, որոնցում ոչ մի պարզ թիվ չլինի:

Առաջին հայացքից թվում է, թե այդ պնդումը ճշմարիտ է: Այն հերքելու համար բերենք հակօրինակ: Դժվար չէ նկատել, որ միմյանց հաջորդող հետևյալ 2000 թվերից յուրաքանչյուրը բաղադրյալ է.

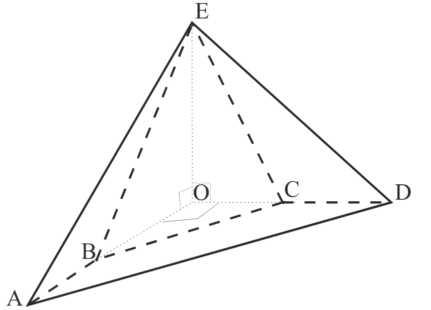
$$2001!+2;\ 2001!+3;\ 2001!+4;\ ...;\ 2000!+2000;\ 2001!+2001:$$

Օրինակ 2. **«Եռանկյան երեք բարձրությունները հատվում են մեկ կետում»:** Այսպես են արտահայտում շատերը՝ եռանկյան բարձրությունների մասին հայտնի թեորեմը ձևակերպելիս: Այս պնդումը հերքելու համար բավական է բերել (կառուցել) եռանկյան այնպիսի օրինակ, որի համար նշված պնդումը կեղծ է: Վերցնենք որևէ ABC հավասարասրուն բութանկյուն եռանկյուն (նկ.17): Ակնհայտ է, որ այդ եռանկյան BD, AE և CF բարձրությունները չունեն ընդհանուր կետ:

Իրականում, համապատասխան թեորեմը (ճշմարիտ պնդումը) հետևյալն է. **եռանկյան երեք բարձրությունները պարունակող ուղիղները հատվում են մեկ կետում:**



Նկ. 17



Նկ. 18

Օրինակ 3. **Հնարավո՞ր է, որ քառանկյուն բուրգի հիմքի հանդիպակաց կողմերով անցնող երկու կողմնային նիստերն ուղղահայաց լինեն հիմքի հարթությանը:**

Առաջին հայացքից թվում է, թե ճիշտ է հետևյալ պատասխանը՝ հնարավոր չէ : Դիցուք, OE-ն AOD եռանկյան հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ է: AO և DO կողմերի վրա վեցնենք B և C կետեր: Ակնհայտ է, որ EABCD քառանկյուն բուրգի ABE և CDE նիստերն ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը (նկ. 18): Այդպիսով մենք հերքում ենք հետևյալ պնդումը. «Քառանկյուն բուրգի հիմքի հանդիպակաց կողմերով անցնող կողմնային նիստերի հարթությունները միաժամանակ չեն կարող ուղղահայաց լինել հիմքի հարթությանը»:

Օրինակ 4. **«Կամայական α և β իռացիոնալ թվերի համար α^{β}-ը ևս իռացիոնալ թիվ է»** պնդումը կեղծ է: Հերքենք այդ պնդումը: Դրա համար բավական է ապացուցել, որ գոյություն ունեն այնպիսի α և β իռացիոնալ թվեր, որ α^{β} - ը ռացիոնալ թիվ է:

Առաջին եղանակ: Վերցնենք, օրինակ, $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{2}$ իռացիոնալ թվերը: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\alpha^{\beta}=\left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}:$$

$\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ –ն իրական թիվ է, նշանակում է՝ կա'մ ռացիոնալ է, կա'մ՝ իռացիոնալ: Եթե այն ռացիոնալ է, ապա խնդիրը լուծված է: Դիցուք, այն իռացիոնալ թիվ է: Այդ դեպքում որպես α կվերցնենք $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, իսկ որպես β կվերցնենք $\sqrt{2}$ թիվը, կունենանք՝

$$\alpha^{\beta}=(\sqrt{3}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=(\sqrt{3})^{2}=3,$$

որն էլ, ակնհայտորեն, ռացիոնալ թիվ է: Դրանով էլ հիմնավորվում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի α և β իռացիոնալ թվեր, որոնց դեպքում α^{β} ռացիոնալ թիվ է:

Երկրորդ եղանակ: Ցույց տանք, որ $\sqrt{3}$ իռացիոնալ թվի $\log_{\sqrt{3}}2$ ցուցիչով $(\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}}2}$ աստիճանը ռացիոնալ է: Այն, որ $\sqrt{3}$-ն իռացիոնալ է, դա հանրահայտ է: Ցույց տանք, որ $\log_{\sqrt{3}}2$-ը նույնպես իռացիոնալ թիվ է: Ապացուցենք հակասող ենթադրության եղանակով. ենթադրենք, թե այն ռացիոնալ թիվ է՝

$$\log_{\sqrt{3}}2=\frac{m}{n}\quad (m,\ n\in N):$$

Լոգարիթմի սահմանումից բխում է, որ $(\sqrt{3})^{\frac{m}{n}}=2$, որտեղից՝ $3^{m}=4^{n}$: Ակնհայտ է, որ վերջին հավասարությունը չի կարող տեղի ունենալ բնական m և n թվերի դեպքում (նրա ձախ մասը կենտ թիվ է, իսկ աջ մասը՝ զույգ): Ստացված հակասությունն էլ հաստատում է, որ $\log_{\sqrt{3}}2$-ն իռացիոնալ թիվ է: Այսպիսով, $\alpha=\sqrt{3}$ և $\beta=\log_{\sqrt{3}}2$ իռացիոնալ թվերի համար ունենք՝

$$\alpha^{\beta}=\left(\sqrt{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}2}=2,$$

այսինքն α^{β}-ը ռացիոնալ թիվ է: Դրանով իսկ հերքվում է նշված պնդումը:

*   *   *

Ուշագրավ է այն փաստը, որ նույնիսկ հանրահայտ մաթեմատիկոսներն իրենց գիտական հետազոտությունների ընթացքում ձևակերպել և հանրությանն են ներկայացրել այնպիսի պնդումներ (իրենց կարծիքով ճշմարիտ), որոնց կեղծ լինելու բացահայտումը առանձնակի դժվարություն չի եղել այլ մաթեմատիկոսների համար:

Ֆրանսիացի հայտնի մաթեմատիկոս **Պիեռ Ֆերման** (որը մեծ ներդրումներ ունի մաթեմատիկայի զարգացման գործում) ձևակերպել է այսպիսի պնդում.

«Ցանկացած n բնական թվի համար $F(n)=2^{2^n}+1$- ը պարզ թիվ է»:

Հետագայում հայտնի մաթեմատիկոս **Լեոնարդ Էյլերը** հերքել է այդ պնդումը. նա ապացուցել է, որ $n=5$ դեպքում ստացված $F(5)=2^{32}+1$ թիվը բաղադրյալ է (բաժանվում է 641-ի):

Գիտության զարգացման ընթացքում մաթեմատիկոսների կողմից հաճախ առաջ են քաշվում պնդումներ, որոնց ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը հաստատվում են ավելի ուշ: Ավելին, դարեր առաջ ձևակերպված բազմաթիվ պնդումներ կան, որոնք շարունակվում են մնալ իբրև վարկածներ (պրոբլեմներ) և մինչև օրս դեռևս լուծված չեն: Այնպես որ, այդպիսի որևէ պնդման հաստատումը կամ հերքումը մեծ նվաճում կարող է լինել համաշխարհային մաթեմատիկայի կյանքում: Բերենք այդպիսի պնդումների օրինակներ.

1) 10^n+3 , $n\in N$ տեսքի թվերի մեջ պարզ թվերի քանակն անվերջ է:
2) Ցուրաքանչյուր զույգ թիվ կարելի է ներկայացնել երկու պարզ թվերի տարբերության տեսքով:
3) $x^3+y^3+z^3=3$ հավասարումն ամբողջ թվերով չորսից ավելի լուծում չունի ((1; 1; 1), (4; 4;5), (4;–5;4) , (–5; 4; 4) լուծումները հայտնի են):
4) $x^3+y^3+z^3=30$ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում չունի:

* * *

Ստորև բերված առաջադրանքներից յուրաքանչյուրում առաջին պնդումը ճիշտ է, իսկ երկրորդ պնդումը՝ սխալ (յուրաքանչյուրում երկրորդ պնդումն առաջինի հակադարձ պնդումն է)։ Այդ սխալ պնդումներից յուրաքանչյուրը հերքելու համար բավական է բերել մեկ օրինակ (հակաօրինակ), որի դեպքում ստացվում է ոչ ճշմարիտ ասույթ։ Այդպիսի առաջադրանքները կարող են նպաստել՝ հնարավորինս խուսափելու սխալ եզրահանգումներ անելուց։

1. ա) Եթե $a=b$, ապա $a^2=b^2$։
բ) Եթե $a^2=b^2$, ապա $a=b$։

2. ա) Եթե $a=b$, ապա $|a|=|b|$։
բ) Եթե $|a|=|b|$, ապա $a=b$։

3. ա) Եթե $m=n$, ապա $a^m=a^n$ $(m;\ n;\ a\in N)$։
բ) Եթե $a^m=a^n$, ապա $m=n$ $(m;\ n;\ a\in N)$։

4. ա) Եթե $x>y$ և $z>t$, ապա $x+z>y+t$։
բ) Եթե $x+z>y+t$, ապա $x>y$ և $z>t$

5. ա) Եթե $x>0$ և $y>0$, ապա $xy>0$։
բ) Եթե $xy>0$, ապա $x>0$ և $y>0$։

6. ա) Եթե $a>b>0$, ապա $a^2>b^2$։
բ) Եթե $a^2>b^2$, ապա $a>b>0$։

7. ա) Եթե $\sqrt{x}=a$, ապա $x=a^2$։ բ) Եթե $x=a^2$, ապա $\sqrt{x}=a$։

8. ա) Եթե x և y թվերը ռացիոնալ են, ապա $(x+y)$-ը ռացիոնալ թիվ է։
բ) Եթե $(x+y)$-ը ռացիոնալ թիվ է, ապա x և y թվերը ևս ռացիոնալ են։

9. ա) Եթե $x=y$, ապա $\sin x=\sin y$։
բ) Եթե $\sin x=\sin y$, ապա $x=y$։

10. ա) Եթե $x=y$, ապա ցանկացած $a>0$ թվի դեպքում $a^x=a^y$։
բ) Եթե $a^x=a^y$, ապա $x=y$։

11. ա) Եթե $\lg x = \lg y$, ապա $x = y$ ։

բ) Եթե $x = y$, ապա $\lg x = \lg y$ ։

12. ա) Եթե $ABCD$ -ն զուգահեռագիծ է, ապա $\angle A = \angle C$ ։

բ) Եթե $ABCD$ քառանկյան մեջ $\angle A = \angle C$, ապա այն զուգահեռագիծ է։

13. ա) Եթե քառանկյունը շեղանկյուն է, ապա նրա անկյունագծերն ուղղահայաց են։

բ) Եթե քառանկյան անկյունագծերն ուղղահայաց են, ապա այն շեղանկյուն է։

14. ա) Եթե $\vec{a} = \vec{b}$, ապա $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ։

բ) Եթե $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, ապա $\vec{a} = \vec{b}$ ։

15. ա) Եթե բուրգի գագաթի պրոյեկցիան հիմքի հարթության վրա (բարձրության հիմքը) հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է, ապա այդ բուրգի կողմնային նիստերի հարթությունները հիմքի հարթության հետ կազմում են հավասար անկյուններ։

բ) Եթե բուրգի կողմնային նիստերի հաբթությունները նրա հիմքի հարթության հետ կազմում են միևնույն անկյունը, ապա այդ բուրգի գագաթի պրոյեկցիան հիմքի հարթության վրա հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է։

Հարկ է նշել, որ նմանատիպ հարցերի քննարկումը սովորողներին հնարավորություն է տալիս խուսանավելու սերտողական բնույթի «գիտելիքներից», նպաստում է մաթեմատիկական կուլտուրայի ձևավորմանը, վերլուծական կարողություն ձեռք բերելուն, ինչպես նաև տրամաբանության զարգացմանը։

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

*Ստորև բերված նախադասություններից յուրաքանչյուրը մաթեմատիկական պնդում է: Պահանջվում է հիմնավորել կամ հերքել համապատասխան պնդումը: Եթե պնդումը ճշմարիտ է, ապա պատասխանում նշվում է «**ճիշտ է**», իսկ եթե ճիշտ չէ, ապա «**սխալ է**» տարբերակը:*

1. 549051-ը պարզ թիվ է:
2. 2^{100} թիվն ունի ճիշտ 100 բաժանարար:
3. Ցանկացած բնական n թվի դեպքում 2^{n^2-n} թիվը զույգ է:
4. Գոյություն ունի այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում $100n+1$ թիվը բնական թվի քառակուսի է:
5. Ցանկացած ամբողջ k թվի դեպքում $(k+5)(k+11)$ թիվը բաղադրյալ է:
6. Գոյություն չունի այնպիսի բնական m թիվ, որի դեպքում $5m+2$-ը բնական թվի քառակուսի է:
7. Կարելի է ընտրել այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում 6^n+7-ը դառնա բնական թվի քառակուսի:
8. Գոյություն ունի այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում ճիշտ է $n^2+n+1=2^{100}$ հավասարությունը:
9. Երեք հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը կարող է հավասարվել 3^{20}-ի:
10. Երեք հաջորդական բնական թվերի գումարը կարող է հավասարվել 3^{101}-ի:
11. $2\cdot10^{30}+1$ թիվը պարզ է:
12. Բնական թվերի շարքում հնարավոր չէ ընտրել միմյանց հաջորդող 1000 թվեր այնպես, որ նրանց մեջ ոչ մի պարզ թիվ չլինի:
13. Գոյություն ունի միակ p պարզ թիվ, որի դեպքում $p+38$ և $p+58$ թվերը միաժամանակ պարզ են:

14. Եթե կոտորակի և՛ համարիչը և՛ հայտարարը մեծացնենք 1-ով, ապա կոտորակը կմեծանա:

15. Հնարավոր է ընտրել իրարից տարբեր հարյուր այնպիսի կոտորակներ, որոնց գումարը փոքր լինի 1-ից:

16. Գոյություն չունի այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1$$

հավասարությունը ճիշտ լինի:

17. Եթե թիվը 1-ից փոքր է, ապա նրա հակադարձը մեծ է 1-ից:

18. Եթե $a^3=b^3$, ապա $a=b$:

19. Եթե $a^4=b^4$, ապա $a=b$:

20. Եթե $ac=bc$, ապա $a=b$:

21. Եթե $a+b=5$, ապա $a^2+b^2=25$:

22. Եթե $a>b$, ապա $a^3>b^3$:

23. Եթե $a>b$, ապա $a^4>b^4$:

24. Եթե երկու դրական թվերի արտադրյալը հավասար է 10-ի, ապա նրանցից յուրաքանչյուրը փոքր է 10-ից:

25. Եթե երկու թվերի գումարը 20 է, ապա նրանցից յուրաքանչյուրը փոքր է 20-ից:

26. Եթե $\frac{a}{b}<1$, ապա $a<b$:

27. Եթե յոթ թվերի գումարը 120 է, ապա նրանցից գոնե մեկը մեծ է 17-ից:

28. Ցանկացած k ամբողջ թվի դեպքում $3^k\geq 3$:

29. Գոյություն չունի այնպիսի n ամբողջ թիվ, որի դեպքում ճիշտ լինի $5^n<0,001$ անհավասարությունը:

30. Եթե $a+\frac{1}{a}=2$, ապա $a^7+\frac{1}{a^7}=2$ ։

31. Եթե $a+\frac{1}{a}=5$, ապա $a^2+\frac{1}{a^2}=25$։

32. Եթե $a-b=1$, ապա $(a+b)(a^2+b^2)=a^4-b^4$։

33. Ցանկացած a-ի դեպքում $\sqrt{(a+5)^2}=a+5$։

34. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$ թիվն ամբողջ է։

35. $\sqrt{28+10\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ թիվն ամբողջ չէ։

36. Ցանկացած a և b թվերի դեպքում $a^2+b^2>2ab$։

37. Ցանկացած դրական a թվի դեպքում $a+\frac{1}{a}\geq 2$։

38. Ցանկացած a թվի դեպքում $a^4\geq a$։

39. Ցանկացած x թվի դեպքում $x^2-x+0,25\geq 0$։

40. Ցանկացած x-ի դեպքում $x^2-4x+4>0$։

41. Եթե a, b, c թվերը բավարարում են $b^2=ac$ պայմանին, ապա այդ թվերը, նշված կարգով, կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա։

42. **3;** 8; 13; ... թվաբանական պրոգրեսիայում գոյություն չունի այնպիսի անդամ, որն ամբողջ թվի քառակուսի է։

43. 1, $\sqrt{13}$ և 33 թվերը կարող են լինել միևնույն թվաբանական պրոգրեսիայի անդամներ (ոչ անպայման հարևան)։

44. 4; 27 և 49 թվերը չեն կարող լինել միևնույն երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամներ։

45. $n^3+n=30$ հավասարությունը ճիշտ է միայն $n=3$ դեպքում։

46. Եթե $(x^2-4x)^2=(2x^2+x)^2$, ապա $x^2-4x=2x^2+x$:

47. $(x^2-1)^2+(x^3-x)^2=0$ հավասարումն արմատ չունի:

48. $5x^4-6x^3+2x^2-8x+1=0$ հավասարումը չունի բացասական արմատ:

49. $8x^3+8x+5=0$ հավասարումն ունի ճիշտ մեկ արմատ:

50. $x^4-(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})x^2-\sqrt{3-\sqrt{5}}=0$ հավասարման բոլոր արմատների գումարը հավասար է $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})$-ի:

51. Տրված է $x^8-5x^6+7x^4-3x^2=0$ հավասարումը:

ա) Հավասարումն ունի գոնե մեկ արմատ:

բ) Հավասարման արմատների քանակը զույգ է:

գ) Հավասարման արմատների գումարը հավասար է 5-ի:

52. $\sqrt{2x^2-4x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4x=(x-2)^2, \\ 2x^2-4x\geq 0: \end{cases}$

53. $\sqrt{2x^2-4x}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0, \\ 2x^2-4x=(x-2)^2: \end{cases}$

54. $\sqrt{x^2+6x}=3|x-5| \Leftrightarrow x^2+6x=9(x-5)^2$:

55. $(x+3)^2<36$ և $x+3<6$ անհավասարումները համարժեք են:

56. $|3x-5|<|2x+9|$ և $(3x-5)^2<(2x+9)^2$ անհավասարումները համարժեք են:

57. $\dfrac{x}{2x+3}<1$ և $x<2x+3$ անհավասարումները համարժեք են:

58. $\sqrt{x^2-4x}>x-3 \Leftrightarrow x^2-4x>(x-3)^2$

59. $\sqrt{2x-6} < |x|+1 \Leftrightarrow 2x-6 < (|x|+1)^2$ ։

60. $\sqrt[4]{x^2+2x} < -x$ անհավասարումը լուծում չունի։

61. $\sqrt{x^2-4x} < x-3 \Leftrightarrow x^2-4x < (x-3)^2$ ։

62. $y=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է աբսցիսների առանցքից վերև։

63. $y=\dfrac{1}{x+2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը չի հատում օրդինատների առանցքը։

64. $y=x^2-7x+10$ և $y=3x-16$ ֆունկցիաների գրաֆիկները չունեն ընդհանուր կետ։

65. Եռանկյան անկյուններից մեկը կարող է մեծ լինել 178^o -ից։

66. Գոյություն ունի եռանկյուն, որի կողմերի երկարություններն են $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ և $\sqrt{23}$ ։

67. Եռանկյան օրթոկենտրոնը չի կարող գտնվել նրա կողմի վրա։

68. Եռանկյանը ներգծած շրջանագծի տրամագիծը փոքր է այդ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմից։

69. Եռանկյան արտագծած շրջանագծի տրամագիծը մեծ է այդ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմից։

70. Յանկացած եռանկյան միջնագծերով կարելի է կառուցել եռանկյուն։

71. Յանկացած եռանկյան բարձրություններով կարելի է կառուցել եռանկյուն։

72. Գոյություն ունի այնպիսի բազմանկյուն, որն ունի ճիշտ 180 անկյունագիծ։

73. Գոյություն չունի այնպիսի ուռուցիկ բազմանկյուն, որն ունենա երեքից ավելի սուր անկյուն։։

74. Եթե a-ն ռացիոնալ թիվ է, իսկ b-ն՝ իռացիոնալ, ապա $(a+b)$-ն իռացիոնալ է:

75. Եթե a-ն ռացիոնալ թիվ է, իսկ b-ն՝ իռացիոնալ, ապա ab-ն իռացիոնալ է:

76. Եթե a-ն և b-ն իռացիոնալ թվեր են, ապա $(a+b)$-նևս իռացիոնալ է:

77. Եթե a-ն և b-ն իռացիոնալ թվեր են, ապա ab-ն ևս իռացիոնալ է:

78. Եթե a-ն և b-ն իռացիոնալ թվեր են, ապա $\sqrt{a+b}$ թիվը ևս իռացիոնալ է:

79. Եթե a-ն ռացիոնալ թիվ է, իսկ b-ն՝ իռացիոնալ, ապա a^b թիվը իռացիոնալ է:

80. $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{2x^3-54}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x^2-8x+15=0 \\ 2x^3-54=0 \end{array}\right.$:

81. $\sqrt{3x^2-x-7}+\sqrt{x^2+5x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-x-7=0 \\ x^2+5x=0 \end{cases}$:

82. $\sqrt{3-\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x+2}{x}}>1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}+\sqrt{x+2}>\sqrt{x}$:

83. $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{5x-7}<\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2x+5} \Leftrightarrow 5x-7>2x+5$:

84. $\log_3(4x-3)\le\log_3(2x+7) \Leftrightarrow 4x-3\le 2x+7$:

85. $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$ հավասարումը համարժեք է $\sin x=0$ հավասարմանը:

86. $(1+\sin x)tgx=0$ հավասարումը համարժեք է $\left[\begin{array}{l} 1+\sin x=0 \\ tgx=0 \end{array}\right.$ համախմբին:

87. $3\sin 2x+2\cos 3x=5$ հավասարումը համարժեք է $\left[\begin{array}{l} \sin 2x=1 \\ \cos 3x=1 \end{array}\right.$ համախմբին:

88. $3\sin x-6\cos x=7$ հավասարումն արմատ չունի:

89. $a\sin x+b\cos x=c$ հավասարումն արմատ ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $c^2\le a^2+b^2$:

90. Տրված է $\cos x+\sqrt{1-x^2}=2$ հավասարումը:

ա) Հավասարման ձախ մասի մեծագույն արժեքը 2-ն է:

բ) Հավասարումն արմատ չունի:

91. Տրված է $\cos\sqrt{x-1}=x$ հավասարումը:

ա) Հավասարման ԹԱԲ-ը $(1;\infty)$ միջակայքն է:

բ) Հավասարումն ունի միակ արմատ:

92. $f(x)=x^2-2x+3$ ֆունկցիան $(0;\infty)$ միջակայքում աճող է:

93. $f(x)=x^3+x+1$ ֆունկցիան կենտ է:

94. $f(x)=|x-1|+|x+1|$ ֆունկցիան զույգ է:

95. Տրված է $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\in(0;\infty)$ ֆունկցիան:

ա) f -ը կենտ ֆունկցիա է:

բ) f ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը 2-ն է:

գ) f ֆունկցիան աճող է:

96. Տրված է $f(x)=x+3^x$ ֆունկցիան։

ա) f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը R - ն է։

բ) f ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ։

97. $f(x)=\lg\frac{x+1}{x-1}$ ֆունկցիան ո՛չ զույգ է և ո՛չ էլ՝ կենտ։

98. Տրված է $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$ ֆունկցիան ։

ա) f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $(0;\infty)$ միջակայքն է։

բ) f ֆունկցիան ո՛չ զույգ է և ո՛չ էլ՝ կենտ։

գ) f ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը R -ն է։

99. Ուղղանկյուն եռանկյունն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը ներքնաձիգի միջնակետն է։

100. ABC եռանկյան մակերեսը 32 է, M -ը եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է։

ա) AMB եռանկյան մակերեսը հավասար է 16-ի։

բ) ABC եռանկյան որևէ կողմի երկարությունը կարող է լինել 2000-ից մեծ։

գ) Եռանկյան երկու կողմերից յուրաքանչյուրի երկարությունը կարող է փոքր լինել 8-ից։

101. Ուղղանկյուն եռանկյան պարագիծը 24 է, իսկ ներքնաձիգը՝ 10։

ա) Այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը 6 է։

բ) Այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը 2 է։

102. Եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը կարող է գտնվել այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի վրա։

103. $ABCD$-ն ուռուցիկ քառանկյուն է. M, N, P, K -ն համապատասխանաբար AB, BC, CD, DA կողմերի միջնակետերն են։

ա) $MNPK$ -ն զուգահեռագիծ է:

բ) $MNPK$ քառանկյան մակերեսը հավասար է 5-ի, եթե $ABCD$ քառանկյան մակերեսը 20 է:

104. Եթե եռանկյան երկու անկյունների կոսինուսների հարաբերությունը հավասար է այդ նույն անկյունների սինուսների հարաբերությանը, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:

105. Եթե եռանկյան մեջ տեղի ունի

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos\beta}$$

առնչությունը, ապա այն հավասարասրուն է:

106. Եթե եռանկյան մեջ տեղի ունի $b=2a\cdot\cos\gamma$ առնչությունը, ապա այդ եռանկյունը հավասարակողմ է:

107. O -ն $ABCD$ սեղանի $(BC\parallel AD)$ անկյունագծերի հատման կետն է:

ա) AOB *և* COD եռանկյունները հավասարամեծ են:

բ) $ABCD$ սեղանի մակերեսը հավասար է $(p+q)^2$*,* եթե հիմքերին առընթեր եռանկյունների մակերեսները p^2 և q^2 են:

108. $ABCD$ քառանկյան մեջ $AC=9$*,* BD = 11: Այդպիսի քառանկյան մակերեսը չի կարող լինել 50:

109. Եռանկյան երեք բարձրություններից յուրաքանչյուրը փոքր է 1 մետրից: Այդպիսի եռանկյան մակերեսը կարող է մեծ լինել 1000 մ²–ուց:

110. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի հիմքը ABC եռանկյունն է, որում $\angle ACB=120^o$; $AC=CB=BB_1$: Այդ դեպքում AC և CB_1 ուղիղների կազմած անկյան կոսինուսը հավասար $\frac{\sqrt{6}}{4}$ -ի:

111. Եռանկյուն բուրգի կողմնային նիստերի հարթությունները հիմքի հարթության հետ կազմում են միևնույն անկյունը: Այդ դեպքում բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնով:

112. Եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են և հավասար են a, b, c: Այդ դեպքում բուրգի ծավալը հավասար է $\frac{abc}{6}$- ի:

113. Գլանը և հատած կոնն ունեն հավասար բարձրություններ, իսկ գլանի հիմքի շառավիղը հավասար է հատած կոնի հիմքերի շառավիղների միջին թվաբանականին: Այդ դեպքում գլանի ծավալը հավասար է հատած կոնի ծավալին:

114. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողի երկարությունը $10\sqrt{3}$ է: Այդ դեպքում.

ա) Խորանարդի անկյունագծի երկարությունը $10\sqrt{6}$ է:

բ) Խորանարդի անկյունագծի կազմած անկյունը յուրաքանչյուր նիստի հետ մեծ է 30°-ից:

գ) Խորանարդին արտագծած գնդային մակերևույթի շառավղի երկարությունը 15 է:

դ) Խորանարդի AA_1 կողի և DB_1 անկյունագծի հեռավորությունը $10\sqrt{3}$ է:

115. $DABC$ կանոնավոր եռանկյուն բուրգին ներգծված է գունդ: Դիցուք՝ K -ն CB -ի միջնակետն է: Այդ դեպքում.

ա) AKD հարթությունն ուղղահայաց է BC ուղղին:

բ) AKD անկյունը հիմքին առընթեր երկնիստ անկյան գծային անկյունն է:

գ) Գնդի 0 կենտրոնը գտնվում է բուրգի DH բարձրության վրա, ընդ որում՝ KO -ն AKD անկյան կիսորդն է:

Պատասխաններ և ցուցումներ

§1. Մի քանի փոփոխականներով բազմանդամներ: Սիմետրիկ բազմանդամներ

4. F-ը, H-ը, g-ն: f-ը *սիմետրիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ* $a=0$: **6.** ա) *Այո*, բ) *ոչ*, գ) *այո*, դ) *այո* , ե) *այո*, զ) *այո*, է) *ոչ*, ը) *ոչ*, թ) *այո*:

11. $u^5-3u^3v-5u^2v+2uv^2+3v^2-v^3$:

14. $(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz$: **22.** 375:

§2 Հավասարումների համակարգեր

44. $(5;6;7)$: **45.** $(-3;\ 2;\ -1)$: **46.** $\varnothing$: **47.** $(1;\ 1;\ 1)$: **48.** $(1;\ 0;-2;\ 0)$: **49.** $(1;\ 2;\ 3;\ -1)$:

50. $\left\{(-1-a+b;a;2-b;b)/\, a\in R, b\in R\right\}$:

51. $\left\{\left(1-\frac{4}{5}a-\frac{2}{5}b;-\frac{1}{5}a-\frac{3}{5}b;a;b\right)\ /\, a\in R, b\in R\right\}$:

54 $a=2$ *դեպքում համակարգն անհամատեղ է;* $a=1$ *դեպքում համակարգն ունի անվերջ բազմությամբ լուծումներ* $(x;y;\ 1-x-y)$, *որտեղ* $x\in R, y\in R$, *իսկ* $a\neq -2$ *և* $a\neq -1$ *դեպքում համակարգն ունի միակ լուծում* $\left(-\frac{a+1}{a+2};\frac{1}{a+2};\frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$:

61. $(2;3),(3;\ 2),(-2;-3),(-3;-2)$: **62.** $(-1;-3),\left(\frac{13}{9};-\frac{1}{4}\right)$: **63.** $(-1;5),(5;-1)$:

64. $\left(\frac{2}{3};\ 3\right),\left(-\frac{2}{3};\ -3\right),\ (1;\ 2),\ (-1;-2)$:

65. $(0;\ 0),(1;\ 1),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6};\ \frac{1-\sqrt{5}}{6}\right),\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{6};\ \frac{1+\sqrt{5}}{6}\right)$:

66. $(1;\ 2),\left(-\frac{239}{146};\ \frac{117}{146}\right)$: **67.** $(0;\ 2),(0;\ -2),(1;\ 0)$:

68. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right),(1;\ 1),(-1;\ -1)$:

69. $(1;\ 0)$:   **70.** $(3;1),(3;-1),\left(-\frac{5}{3};\frac{\sqrt{65}}{3}\right),\ \left(-\frac{5}{3};-\frac{\sqrt{65}}{3}\right)$:

71. $(3;\ 2),\ (2;3),(5;1),(1;\ 5)$:   **72.** $(2;\ 1),\left(-\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$:   **73.** $(2;\ 1)$:

74. $(3;\ 2),(1;\ 4),(-3;\ -4),(-5;\ -2)$:   **75.** $(4;\ 2),(-4;\ -2)$:

76. $(5;\ 3),(-3;\ -5),\left(\sqrt{17};\ \sqrt{17}\right),\ \left(-\sqrt{17};-\sqrt{17}\right)$:   **77.** $(3;\ 5),(5;3)$:

78. $(-1;5),(-5;1)$: **79.** $\left(a;-\frac{3}{2}a\right), a\in R$:

80. $\left(\frac{\sqrt{30}}{40};0-\frac{\sqrt{30}}{10}\right),\left(-\frac{\sqrt{30}}{40};\frac{\sqrt{30}}{10}\right),\ \left(\frac{\sqrt{30}}{5};\frac{\sqrt{30}}{5}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{30}}{5};-\frac{\sqrt{30}}{5}\right)$:

81. $\left(2;\frac{1}{2}\right),\left(-2;-\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{10}}{5};-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right),\ \left(\frac{\sqrt{10}}{5};-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{10}}{5};\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$:

82. $(1;\ 2),(-1;\ -2)$: **83.** $(2;\ \ 3),\ (-2;-3);\ \ (3;\ 2)\ (-3;\ -2)$: **84.** $(3;-1),(-1;\ 3)$:

85. $(1;\ 2),(2;\ 1)$: **86.** $(2;\ 1),(-2;-1)$: **87.** $(3;\ 1),(1;\ 3),\ (-1;-3),(-3;-1)$:

88. $(3;\ 2),(-4;-12);(0;\ 0)$: **89.** $(1;2),(-1;-2)$:

90. $(6;\ 6),\ \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2};\ -\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2};\ -\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right)$:

91. $(2;3),\ (3;2);\left(-\frac{3}{4};\ -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{103}{3}};\ -\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{103}{3}}\right);\ \left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{103}{3}};\ -\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{103}{3}}\right)$:

92. $(2;\ 1),(1;\ 2),\ (-2;\ -1),(-1;\ -2)$:   **93.** $(2;\ 3),(3;\ 2)$:

94. $(3;\ -2),(-2;\ 3),\ (2;\ -3),(-3;\ 2)$:   **95.** $(1;2),(2;1)$:

96. $(2;\ -1),(-2;\ 1),(1;\ -2),(-1;\ 2)$:   **97.** $(3;1),(-1;-3),\left(\sqrt[3]{13};-\sqrt[3]{13}\right)$:

98. $(1;\ 0),(-1;-1)$: **99.** $(0;2),(0;-2),\ \ (1;-3),(-1;-3)$: **100.** $(-2;0),(-3;3),(-4;2)$:

101. $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right),\ \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right),\ (1;\ 2),(2;\ 1)$:

102. $(0;\ 1),(1;\ 0)$:   **103.** $(2;2)$:

104. $\left(2+\sqrt{3};7+4\sqrt{3}\right),\left(2+\sqrt{3};7-4\sqrt{3}\right),\ \left(7+4\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\right),\left(7+4\sqrt{3};\ \ 2-\sqrt{3}\right),$
$\left(2-\sqrt{3};\ 7+4\sqrt{3}\right),\ \left(2-\sqrt{3};\ 7-4\sqrt{3}\right),\ \left(7-4\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\right),\left(7-4\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3}\right)$:

105. $(1;\ 2;\ 3),(-1;\ -2;\ -3)$: **106.** $(1;\ 1;\ 1),\ (-2;-2;-2)$:

107. $(1;\ 2;\ 3),(1;\ 4;\ 1),(5;\ 2;-1),\ (5;\ 4;\ -3)$: **108.** $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$:

109. $(0;\ 1;\ 2),(-2;\ -3;\ -4)$: **110.** $(1;\ 2;\ 3)$: **111.** $(9;\ 3;\ 1),\ (1;\ 3;\ 9)$:

112. $(0;\ 0;\ 0),\ (1;\ 2;\ 1),(2;\ 1;\ 1),\ \left(\frac{3+\sqrt{6}}{3};\ \frac{3-\sqrt{6}}{3};\ \frac{2}{3}\right),\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3};\ \frac{3+\sqrt{6}}{3};\frac{2}{3}\right)$:

113. $(1;\ 2;\ 3),\ (1;\ 3;\ 2),\ (2;\ 1;\ 3),\ (2;\ 3;\ 1),(3;\ 1;\ 2),(3;\ 2;\ 1)$:

114. $(0;1;3),(0;3;\ 1),\ (1;\ 0;\ 3),(1;\ 3;\ 0),(3;\ 0;\ 1),\ (3;\ 1;\ 0)$:

115. $(1;-2;3),(3;-2;1),(1;-3;2),(2;-3;1),\ (2;-1;\ 3),(3;\ -1;\ 2)$:

116. $(3;\ 2;\ 1),(3;\ -2;-1),(-3;\ 2;-1),(-3;-2;\ 1)$: **117.** $(1;1;1)$:

118. $\left(\frac{10}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{8}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{10}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$: **119.** $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$: **120.** $(4;\ 4;\ 4)$:

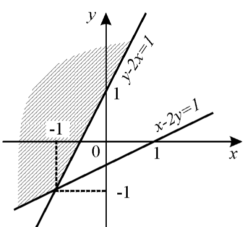
121. $\left(2+\sqrt{3};2+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right),\left(2-\sqrt{3};2-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$: **122.** $a=\pm\sqrt{2}$:

123. $a=\pm1$; $a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$: **124.** $a=-0{,}5$: **125.** $a=-\frac{5}{4}$: **126.** $a=-1$:

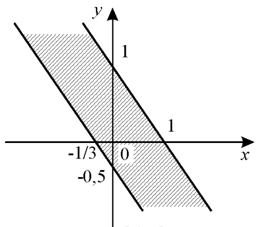
127. $|a|\in\left(19-6\sqrt{10};1\right)\cup\{4\}$: **128.** $a=2, b=-2$: **129** $a=b=-2$: **130.** 77 :

§ 3. Անհավասարումների համակարգեր

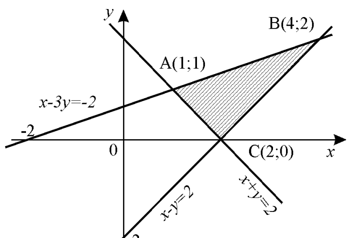
1.*Նկ.1-ում պատկերված անկյունը:* **2.** *Անկյուն:* **3.** *Շերտ (Նկ.2):* **4.** $A(1;1), B(4;2)$ և $C(2;0)$ *գագաթներով եռանկյունը (Նկ.3):*



Նկ. 1

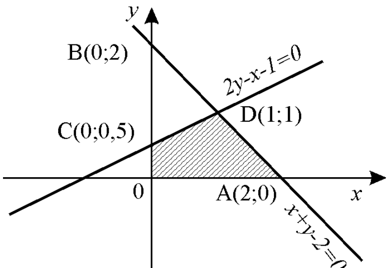


Նկ. 2

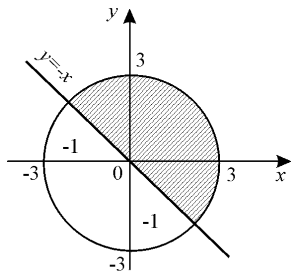


Նկ. 3

5. $A(0;0), B(-2;1)$ և $C(2;2)$ *գագաթներով եռանկյունը:* **6.** $A(-1;0), B\left(\frac{1}{3};0\right)$ և $C(-1;2)$ *գագաթներով եռանկյունը:*

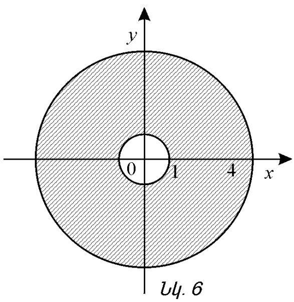


Նկ. 4

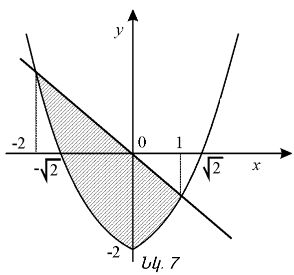


Նկ. 5

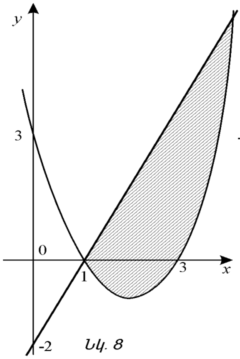
7. $O(0;\ 0), A(2;\ 0), D(1;\ 1)$, $C(0;\ 0{,}5)$ *գագաթներով քառանկյունը (նկ.4):*
8. $A(0;-1), B(-6;\ 5), C(2;\ 1)$ և $D(2;\ -2)$ *գագաթներով սեղանը:*
9. $A(-1;\ 0),\ \ B(-1;\ 1), C(3;\ 5)$ և $D\left(\frac{4}{3};0\right)$ *գագաթներով ուռուցիկ քառանկյունը:*
10. *Ուռուցիկ քառանկյուն:*
11. *Կիսաշրջան (նկ.5):* **12.** *Համակենտրոն շրջանագծերով սահմանափակված օղակը (նկ.6):* **13.** *Պարաբոլական սեգմենտ (նկ.7):* **14.** *Պարաբոլական սեգմենտ (նկ.8):* **15.** *Բազմությունը պատկերված է 9-րդ նկարում:* **16.** *Սեկտոր:* **17.** *Բազմությունը պատկերված է 10-րդ նկարում:* **18.** *Բազմությունը պատկերված է 11-րդ նկարում :*
23. $(3;-4),(4;-5)$: **24.** 4 : **25.** 4 :



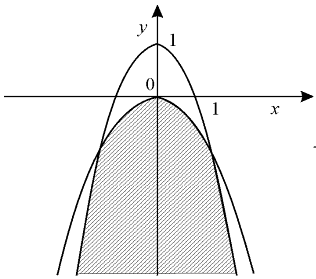
Նկ. 6



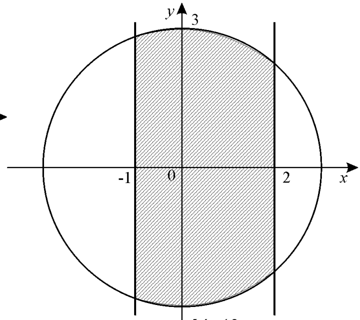
Նկ. 7



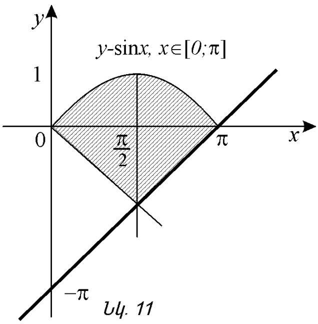
Նկ. 8



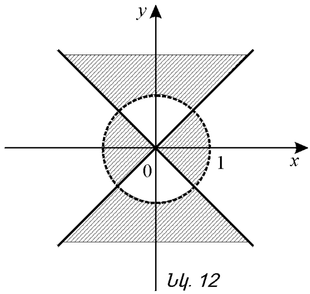
Նկ. 9



Նկ. 10



Նկ. 11



Նկ. 12

26. 3π :   **27.** $3\sqrt{3}+10\pi$:   **28.** $1+\dfrac{\pi}{2}$:   **29.** $\dfrac{22}{3}-\dfrac{4\pi}{9}$:   **30.** 2π : **31.** 16 :

32. *Բազմությունը պատկերված է 12-րդ նկարում:*

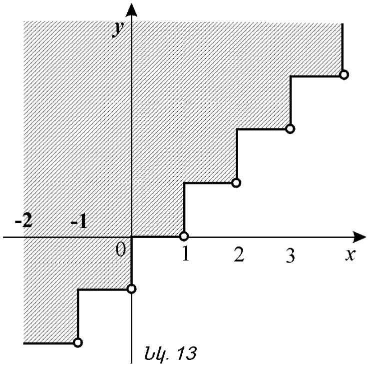
39. *Բազմությունը պատ կերված է 13-րդ նկարում* **40.** *Բազմությունը պատկերված է 14-րդ նկարում (ուղղաձիգ ուղիղների կետերը, բացի եռանկյունների* գագաթներից, բազմությանը չեն պատկանում): **41.** 50 : **42.** 25 : **43.** 40 : **44.** $\dfrac{\pi}{2}+1$:

45. $2\sqrt{2}$: **46.** $7\sqrt{3}$: **47.** $a=-0{,}25$:

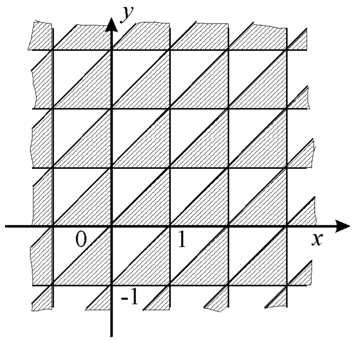
48. $-3{,}5\le a\le 1$:

49. ա) $0{,}5\le a\le 6{,}8$, բ) $-4\le a\le 2$:

50. $-\dfrac{5}{11}<a<-\dfrac{1}{3}$:



Նկ. 13



Նկ. 14

§4. Ոչ ստանդարտ հավասարումներ և անհավասարումներ

1. $\left(-2;\sqrt{3}\right)$: **2**. $\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$: **3.** $(-3;-3)$: **4.** $(-2;-1;-1)$: **5.** $(1;-3)$:

6. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: **7.** $(2;2)$: ***Ցուցում***: *Կիրառելով* $(a+b)^2 \leq \leq 2\left(a^2+b^2\right)$ *անհավասարությունը, ցույց տալ, որ տրված հավասարման ձախ մասի արտահայտության մեծագույն արժեքը 2-ն է*:

8. $(11;5)$: ***Ցուցում***: *Կիրառել* $a+b \geq 2\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$ *անհավասարությունը*:

9. $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}};\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$: **10.** $(1;2)$: ***Ցուցում***: *Տրված հավասարումը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝* $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+4\sqrt[3]{(y-1)^2}+\frac{4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}}=10,$ *այնուհետև*

$\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 + 4\left(\sqrt[3]{y-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{y-1}}\right)^2=0$ *և այլն:*

11. $(2;-1)$: **12.** $(2;2)$: ***Ցուցում***: *Տրված հավասարումը համարժեք է* $\frac{\sqrt{y-1}}{y}+\frac{\sqrt{x-1}}{x}=1$ *հավասարմանը: Ցույց տալ, որ այս հավասարման ձախ մասի գումարելիներից յուրաքանչյուրը չի գերազանցում* $\frac{1}{2}$ *-ը:*

13. $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi n\right), k,\ n\in Z$:

14. $(-2;\pi k)$, $\left(2;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$: **15.** $\left(1;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$; $\left(-1;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$:

16. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right), k,n\in Z$:

17. $\left(\pi k-arctg\sqrt{2};\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$; $\left(\pi k+arctg\sqrt{2};\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $k,\ n\in Z$:

18. $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;2\pi n\right)$; $\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\pi+2\pi n\right)$, $k,\ n\in Z$:

19. $\left(\frac{5\pi}{3}+2(n+k)\pi;-\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3}+2(n+k)\pi;-\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}+2(n+k)\pi;-\frac{5\pi}{3}+2(n-k)\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}+2(n+k)\pi;\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi\right), n,k\in Z$:

20. $\left((-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$; $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right), k,n\in Z$:

21. $\left(-1;1+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right), k\in Z$: **22.** $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi n\right), k,n\in Z$:

23. $(0;0)$: **24**. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$; $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$: **25**. $\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$:

26. $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};1\right), k\in Z$: **27**. $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6e}+\frac{\pi k}{e};e\right)$; $\left((-1)^k\frac{\pi}{6e}-\frac{\pi k}{e};-e\right)$:

28. $(o;y)$, *որտեղ* $2\pi k<y<\pi+2\pi k,\ k\in Z$:

29. $\left(\pi k;\frac{\pi n}{2};-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi m\right), k,\ n,\ m\in Z$: **30.** $(3;3;3)$: **31.** $(4;6;2)$: **32.** $(2;2;2)$:

33. $(4;4;4)$: **34.** $(2;2;2)$:

35. $(5;5;5)$: ***Ցուցում:*** *Համակարգի առաջին հավասարման ձախ մասի գումարելիների համար կիրառել* $u+v+t\ge 3\sqrt[3]{uvt}$ $(u\ge 0, v\ge 0, t\ge 0)$ *հայտնի անհավասարությունը:*

36. $(2;2;2)$: ***Ցուցում:*** *Օգտվել* $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)$ $(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ *նույնությունից:*

37. $(2;4;6)$: ***Ցուցում:*** *Օգտվել* $(ax+by+cz)^2\le(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ *անհավասարությունից:* **38.** $\left(\pi k;\pi n;(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m\right), k,n,m\in Z$:

39. $(2;6)$, **40.** $(1;3);(17;3)$: **41.** $(6;1;0);(6;-1;0);(0;-1;0)$:

42. $(1;5;0);(1;-5;0);(-1;5;0);$ $(-1;-5;0)$: **43.** $(6;5;4;1);$ $(4;1;6;5)$: ***Ցուցում:*** *Տրված հավասարումներից յուրաքանչյուրը քառակուսի բարձրացնենք և գումարենք: Որոշ պարզագույն ձևափոխություններից հետո կստացվի* $(x^2+t^2)(y^2+z^2)=1517=37\cdot 41$ *հավասարությունը:* **44.** $(1;0)$: **45.** $(5;\ \pi+2\pi k);\left(\frac{1}{5};\pi+2\pi k\right), k\in Z$:

46. $(0;1)$: **47.** $(0;1)$: **48.** $(0;1)$: **49.** $(\pi+2\pi k;b)$, *որտեղ* $k\in Z, b\in R$:

50. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{1}{10}\right), k\in Z$: **51.** $(0;\pi k), k\in Z$: **52.** $(0;1)$: **53.** $(0;0)$:

54. $a\in(-\infty;1)$: **55.** $[-4{,}5;\ \infty)$:

§5. Էքստրեմումային խնդիրներ

1. 4 սմ, 4 սմ, 8 սմ: **2.** 18 սմ: **3.** 3 մ, 6 մ, 2 մ: **4.** 2 դմ, 2 դմ, 2 դմ: **5.** 4 մ, 4 մ, 2 մ: **6.** 2 մ, 0,5 մ, 2,5 մ: **7.** 2 մ, 1 մ, 3 մ: **8.** Խորանարդը:

9. 20 սմ^2: **10.** 14 սմ: **11.** 24 դմ^2: **12.** 4 սմ: **13.** 2 սմ: **14.** 6 սմ: **15.** 4 սմ:

16. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ սմ: **17.** 2 սմ, $\sqrt{6}$ սմ: **18.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$: **19.** 10 սմ: **20.** 33 սմ^2: **21.** $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a^2$:

22. Հիմքի շառավիղը՝ 1, բարձրությունը՝ 2: **23.** 16π սմ^2: **24.** 2: **25.** Կոնի հիմքի շառավիղը՝ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$, իսկ բարձրությունը՝ $\sqrt{\frac{2S}{\pi}}$:

26. Հիմքի շառավիղը՝ $\sqrt[6]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}$, բարձրությունը՝ $\sqrt[3]{\dfrac{6V}{\pi}}$:

27. Կոնի հիմքի շառավիղը՝ $4\sqrt{2}$ սմ, բարձրությունը՝ 4 սմ: **28.** $2\sqrt{2}$:

29. $\dfrac{8}{5}$ դմ, $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ դմ: **30.** 1 սմ: **31.** 1 սմ: **32.** 36 սմ^2 : **33.** 3 սմ:

34. $\dfrac{a}{2}, \dfrac{h}{2}$: **35.** Քառակուսի հիմքով զուգահեռանիստ:

36. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$ կողով խորանարդը: **37.** $62,5\,\pi$ սմ^3: **38.** 3 սմ:

39. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$:

40. Կոնի հիմքի շառավիղը՝ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$, բարձրությունը՝ $\dfrac{4}{3}R$:

41. Կոնի հիմքի շառավիղը՝ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$, բարձրությունը՝ $\dfrac{4}{3}R$:

42. Գլանի հիմքի շառավիղը և բարձրությունը $1,5$ ական սմ են:

43. $\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$: **44.** 3 :

§ 6.Ածանցյալի կիրառումը տարատեսակ խնդիրներ լուծելիս

1.Մեկ արմատ: **2.**Մեկ արմատ: **3.** Երեք արմատ: **4.**Արմատ չունի:
5. Երեք արմատ: **6.**Երկու արմատ: **7.**Մեկ արմատ: **8.** Երեք արմատ:
9. Երկու արմատ: **10.** Երկու արմատ: **11.** Երկու արմատ:
12. Երեք արմատ, եթե $a\in(-2;2)$; երկու արմատ, եթե $a=\pm2$; մեկ արմատ, եթե $a\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$:

13. Մեկ արմատ, եթե $a<1,5\sqrt[3]{2}$; երկու արմատ, եթե $a=1,5\sqrt[3]{2}$; երեք արմատ, եթե $a>1,5\sqrt[3]{2}$: **Ցուցում** : Հավասարումը ներկայացնել $x^2+\dfrac{1}{x}=a$ տեսքով:

14. Երկու արմատ, եթե $0 < a < \frac{1}{e}$; մեկ արմատ, եթե $a = \frac{1}{e}$ կամ $a = 0$;

արմատ չունի, եթե $a > \frac{1}{e}$:

15. Մեկ արմատ, եթե $a = e$; երկու արմատ, եթե $a > e$; արմատ չունի, եթե $0 \leq a < e$:

16. Արմատ չունի, եթե $a > e^{\frac{1}{e}}$;մեկ արմատ, եթե $0 < a \leq 1$, $\mathrm{a} = \mathrm{e}^{\frac{1}{e}}$;

երկու արմատ, եթե $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$: **17.** Երկու արմատ, եթե $0 < a < \frac{1}{2e}$; մեկ արմատ,

եթե $a \leq 0$ կամ $a = \frac{1}{2e}$; արմատ չունի, եթե $a > \frac{1}{2e}$:

18. $b \in [-1;\infty)$: **36.** **Ց ո ւ ց ո ւ մ: Առաջին եղանակ**: Դիտարկենք $f(x) = y^{1-a} \cdot x^a - ax - (1-a)y$ ֆունկցիան (0;∞) միջակայքում:Այդ ֆունկցիայի ածանցյալը `

$$f'(x) = ay^{1-a}(x^{a-1} - y^{a-1}):$$

Ակնհայտ է,որ $a = 1$ դեպքում տրված անհավասարությունը ճիշտ է:Երբ $a \neq 1$,ապա $x = y$-ը միակ կրիտիկական կետն է: Դժվար չէ համոզվել, որ $(0; y)$ միջակայքում $f'(x) > 0$, իսկ $(y;\infty)$ միջակայքում` $f'(x) < 0$: Նշանակում է` առաջին միջակայքում ֆունկցիան աճող է. իսկ երկրորդում նվազող: Հետևաբար, $x = y$ կետում ֆունկցիան ընդունում է մեծագույն արժեք: Քանի որ $f(y) = 0$,ուստի ցանկացած $x > 0$ դեպքում $f(x) \leq 0$, որտեղից էլ հետևում է ապացուցվելիք անհավասարությունը:

Երկրորդ եղանակ : Օգտվել նախորդ խնդրի արդյունքից` $x$-ը փոխարինելով $\frac{x}{y}$ - ով, իսկ $\alpha$–ն` a-ով:

37. Առաջինը: **38.** Առաջինը: **39.** Երկրորդը: **40**. Առաջինը: **41**.Երկրորդը :

Ցուցում : Դիտարկել $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ ֆունկցիան և համոզվել, որ այն

$(0;\infty)$ -ում աճող է:

42. Երկրորդը : **Ցուցում** : Օգտվել $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

անհավասարությունից:

48.Ցուցում : Օգտվել №35 խնդրի անհավասարությունից՝ տեղադրելով $\alpha = \dfrac{1}{k}$ $(k = 2,3,4,....,n)$: Այնուհետև գումարել ստացված $n-1$ հավասարությունները:

49.Ցուցում: №36 խնդրի անհավասարության մեջ տեղադրել՝

$$x = \frac{x_i^{\frac{1}{a}}}{x_1^{\frac{1}{a}} + x_2^{\frac{1}{a}} + ... + x_n^{\frac{1}{a}}}, y = \frac{y_i^{\frac{1}{b}}}{y_1^{\frac{1}{b}} + y_2^{\frac{1}{b}} + ... + y_n^{\frac{1}{b}}}$$ $(i = 1,2,....,n)$, այնուհետև գումարել ստացված n հավասարությունները:

50. $\dfrac{n(n+1)}{2}$, եթե $x=1$; $\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, եթե $x \neq 1$:

51. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, եթե $x=1$;

$\dfrac{n^2x^{n+1}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^2-x-1}{(x-1)^3}$, եթե $x \neq 1$:

52. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, եթե $x=1$; $\left(\dfrac{x^2-x^{n+2}}{1-x}\right)'$, եթե $x \neq 1$:

53. n^2, եթե $x = \pm 1$; $\left(\dfrac{x-x^{2n+1}}{1-x^2}\right)'$, եթե $x \neq \pm 1$:

54. $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}x^{4n+1}+x}{x^4+1}\right)'$:

55. $\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, եթե $x=1$; $\left(\dfrac{x^{2n}-x}{x-1}\right)' + x\left(\dfrac{x^{2n}-x}{x-1}\right)''$, եթե $x \neq 1$:

56. 0, եթե $x = 2\pi k$; $\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x \cdot \sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$, եթե $x \neq 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$:

57. $\dfrac{n(n+1)}{2}$, եթե $x=2\pi k$; $\left(\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\cdot\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)'$, եթե $x\neq 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$:

58. 0, եթե $x=2\pi k$; $-\left(\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\cdot\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)''$, եթե $x\neq 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$:

59. $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, եթե $x=2\pi k$; $-\left(\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\cdot\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)'''$, եթե $x\neq 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$:

60. $S_n=\dfrac{n^2+n+1}{2}$, եթե $x=2\pi k$; $S_n=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$, եթե $x\neq 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$:

61. 0, եթե $x=2\pi k$; $-\left(\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right)'$, եթե $x\neq 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$:

62. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, եթե $x=2\pi k$; $-\left(\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right)''$, եթե $x\neq 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$:

63. 0, եթե $x=2\pi k$; $\left(\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right)'''$, եթե $x\neq 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$:

64. $P_n=\pm 1$, եթե $x=2^n\pi k$; $P_n=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$, եթե $x\neq 2^n\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$:

65. 0, եթե $x = 2^n \pi k$; $\frac{1}{2^n} ctg \frac{x}{2^n} - ctgx$, եթե $x \neq 2^n \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$:

66. $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{x}{2^n}}$:

§ 7 Ասույթներ և պնդումներ

1. Սխալ է: **2.** Սխալ է: **3.** Սխալ է: **4.** Ճիշտ է: **5.** Սխալ է: **6.** Ճիշտ է:
7. Սխալ է: **8.** Սխալ է: **9.** Սխալ է: **10.** Ճիշտ է: **11.** Սխալ է: **12.** Սխալ է:
13. Ճիշտ է: **14.** Սխալ է: **15.** Ճիշտ է: **16.** Ճիշտ է: **17.** Սխալ է: **18.** Ճիշտ է:
19. Սխալ է: **20.** Սխալ է: **21.** Սխալ է: **22.** Ճիշտ է: **23** Սխալ է: **24.** Սխալ է:
25. Սխալ է: **26.** Սխալ է: **27.** Ճիշտ է: **28.** Սխալ է: **29.** Սխալ է: **30.** Ճիշտ է:
31. Սխալ է: **32.** Ճիշտ է: **33.** Սխալ է: **34.** Ճիշտ է: **35.** Սխալ է: **36.** Սխալ է:
37. Ճիշտ է: **38.** Սխալ է: **39.** Ճիշտ է: **40.** Սխալ է: **41.** Սխալ է: **42.** Ճիշտ է:
43. Ճիշտ է: **44.** Ճիշտ է: **45.** Ճիշտ է: **46.** Սխալ է: **47.** Սխալ է: **48.** Ճիշտ է:
49. Ճիշտ է: **50.** Սխալ է: **51.** **ա)** Ճիշտ է, **բ)** սխալ է, **գ)** սխալ է: **52.** Սխալ է:
53. Ճիշտ է: **54.** Ճիշտ է: **55.** Սխալ է: **56.** Ճիշտ է: **57.** Սխալ է: **58.** Սխալ է:
59. Սխալ է: **60.** Սխալ է: **61.** Սխալ է: **62.** Սխալ է: **63.** Սխալ է: **64.** Ճիշտ է:
65. Ճիշտ է: **66.** Ճիշտ է: **67.** Սխալ է: **68.** Ճիշտ է: **69.** Սխալ է: **70.** Ճիշտ է:
71. Սխալ է: **72.** Սխալ է: **73.** Ճիշտ է: **74.** Ճիշտ է: **75.** Սխալ է: **76.** Սխալ է:
77. Սխալ է: **78.** Սխալ է: **79.** Սխալ է: **80.** Սխալ է: **81.** Ճիշտ է: **82.** Սխալ է:
83. Ճիշտ է: **84.** Սխալ է: **85.** Սխալ է: **86.** Սխալ է: **87.** Սխալ է: **88.** Ճիշտ է:
89. Ճիշտ է: **90.** **ա)** Ճիշտ է, **բ)** սխալ է: **91.** **ա)** Սխալ է,**բ)** ճիշտ է: **92.** Սխալ է:
93. Սխալ է: **94.** Ճիշտ է: **95.** **ա)** Սխալ է **բ)** ճիշտ է,**գ)** սխալ է:
96. **ա)** Ճիշտ է,**բ)** սխալ է: **97.** Սխալ է: **98.** **ա)** Սխալ է,**բ)** սխալ է,**գ)** ճիշտ է:
99. Ճիշտ է: **100.** **ա)** Սխալ է,**բ)** ճիշտ է, **գ)** սխալ է:
101. **ա)** Սխալ է,**բ)** ճիշտ է: **102.** Ճիշտ է: **103.** **ա)** Ճիշտ է,**բ)** սխալ է:
104. Ճիշտ է: **105.** Ճիշտ է: **106.** Սխալ է: **107.** **ա)** Ճիշտ է,**բ)** ճիշտ է:
108. Ճիշտ է: **109.** Ճիշտ է: **110.** Ճիշտ է: **111.** Սխալ է: **112.** Ճիշտ է:
113. Սխալ է: **114.** **ա)** Սխալ է, **բ)** ճիշտ է, **գ)** ճիշտ է, **դ)** սխալ է:
115. **ա)** Ճիշտ է , **բ)** ճիշտ է, **գ)** ճիշտ է:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Կորյուն Գարեգինի Առաքելյան
Հայկազն Սարիբեկի Նավասարդյան
Արման Հովհաննեսի Սարգսյան

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

12-րդ դասարան

Խմբագիր՝ Կորյուն Առաքելյան
Կազմի ձևավորումը՝ Գևորգ Շառոյանի
Համակարգչային ձևավորումը՝ Հրայր Շառոյանի
Համակարգչային շարվածքը՝ Հասմիկ Առաքելյանի

Ստորագրված է տպագրության 15.08.2016:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ:
Տպագրությունը՝ օֆսեթ: 8 տպ. մամուլ:
Տպաքանակը՝ 200 օրինակ:

«ԳԵՎՈՐԳ - ՀՐԱՅՐ» ՍՊԸ

Հրատարակչություն
Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6:
Հեռ.՝ 52.79.74
էլ. փոստ lusakn@rambler.ru