

Первая олимпиада мегаполисов

Математика · День 2

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. На продолжении стороны AD за точку D дана такая точка E , что $\angle ABE = \angle ADC$. Точка K симметрична точке C относительно точки A . Докажите, что $\angle ADB = \angle AKE$.

Задача 5. Дан многочлен $r(x)$ нечетной степени. Докажите, что множество пар многочленов $p(x)$ и $q(x)$, удовлетворяющих равенству $(p(x))^3 + q(x^2) = r(x)$, конечно или пусто. (Все многочлены — с действительными коэффициентами.)

Задача 6. В стране n городов и две авиакомпании A и B . Некоторые пары городов соединены односторонними беспосадочными авиалиниями (каждая авиалиния принадлежит либо A , либо B , между двумя городами может быть более одной авиалинии). Назовём слово w из букв A и B реализуемым, если найдется маршрут из последовательных авиаперелетов, названия авиакомпаний в котором идут в том же порядке, как и буквы в слове w . Известно, что все слова длины 2^n из букв A и B реализуемы. Докажите, что любое слово конечной длины из букв A и B реализуемо. (Слово длины k — это любая последовательность из k букв A и B ; например, $ААВА$ — слово длины 4.)