X դասարան

1) **Ա-1, Բ-2** Ապացուցեք, որ գոյություն չունի $n$ բնական թիվ այնպես, որ $\frac{7^n-1}{6^n-1}$ կոտորակի արժեքը բնական թիվ է:

**Լուծում:** $6^n$ -ի վերջին թվանշանը 6 է, հետևաբար $6^n-1 \vdots 5$ : + 1 միավոր

Երբ $n=2k+1$, ապա $7^n$ –ի վերջին թվանշանը 3 կամ 7 է, հետևաբար $7^n-1$ 5-ի բազմապատիկ չէ: + 3 միավոր

Երբ $n=2k$, ապա $6^n-1=36^k-1 \vdots 35 \vdots 7$ , իսկ $7^n-1$ -ը 7-ի բազմապատիկ չէ:

\+ 3 միավոր

2) **Բ-1** Դիցուք $a,b,c>0$ և $(a+c)\left(b^2+ac\right)=4a$ : Ապացուցեք, որ $b+c\le 2$:

**Լուծում 1:** $4a=(a+c)\left(b^2+ac\right)=a\left(b^2+c^2\right)+c\left(b^2+a^2\right)\ge a\left(b^2+c^2\right)+2cab=a(b+c)^2\Rightarrow$

$(b+c)^2\le 4\Rightarrow b+c\le 2$ ,քանի, որ $b,c>0$:

**Լուծում 2:**

$(a+c)\left(b^2+ac\right)=4a\Rightarrow \dfrac{4}{a+c}=\dfrac{b^2}{a}+c=\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{c}\ge\dfrac{(b+c)^2}{a+c}\Rightarrow(b+c)^2\le 4\Rightarrow b+c\le 2$ , քանի, որ $b,c>0$:

Եթե տրվել է որևէ գնահատական 1 միավոր

Եթե տրվել է $b+c$ -ի որևէ գնահատական 3 միավոր

Խնդիրը լուծված է 7 միավոր

**Լուծում 3:** $(a+c)\left(b^2+ac\right)=4a\Leftrightarrow c\cdot a^2+\left(b^2+c^2-4\right)\cdot a+b^2c=0$ , որը $a$ -ից կախված քառակուսի հավասարում է, որի լուծում ունենալու անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է՝ $D=\left(b^2+c^2-4\right)^2-4b^2c^2\ge 0\Leftrightarrow\left|b^2+c^2-4\right|\ge 2bc$ : Քանի, որ $c\cdot a^2+\left(b^2+c^2-4\right)\cdot a+b^2c=0$ հավասարման $a_1,a_2$ արմատներից որևէ մեկը դրական է, իսկ $a_1a_2=\dfrac{b^2a}{c}>0$ , հետևաբար $a_1>0,a_2>0$ : Այդ դեպքում $a_1+a_2=\dfrac{4-b^2-c^2}{c}>0$ , որտեղից $b^2+c^2<4$ ,հետևաբար

$\left|b^2+c^2-4\right|\ge 2bc\Leftrightarrow 4-b^2-c^2\ge 2bc\Rightarrow(b+c)^2\le 4\Rightarrow b+c\le 2$ , քանի, որ $b,c>0$:

Գրված է քառակուսի հավասարան լուծում ունենալու պայմանը:

+ 2 միավոր

Ապացուցված է, որ $b^2+c^2<4$ + 2 միավոր

Խնդիրը լուծված է 7 միավոր

3) **Ա-2, Բ-3** Ոչ զրոյական թվանշաններից կազմված տասանիշ թվի թվանշաններից ջնջել են կամայական յոթը և ստացված եռանիշ թվերը գումարել: Կարո՞ղ է արդյոք այդ գումարը հավասար լինել 20170:

**Լուծում:** Դիցուք a–ն 10-անիշ թվի թվանշաններից մեկն է: a թվանշանը պարունակող ստացված եռանիշ թվերի քանակը հավասար է $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$:

\+ 3 միավոր

100a, 10a, a թվերը 3-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդները հավասար են:
\+ 2 միավոր

Քանի, որ a–ն մասնակցում է 36 եռանիշ թվերի գրառմանը և a-ն կամայական է, հետևաբար ստացված եռանիշ թվերը գումարը բաժանվում է 3-ի, իսկ 20170-ը չի բաժանվում 3-ի: + 2 միավոր

***Դիտողություն:** Եթե գրված է ստացված եռանիշ թվերի քանակը՝ $C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$:

1 միավոր

4) **Ա-3** Դիցուք $a,b,c>0$ և $a^2+b^2+c^2=3abc$ : Ապացուցեք, որ $(3a-2)(3b-2)(3c-2)\geq 1$:

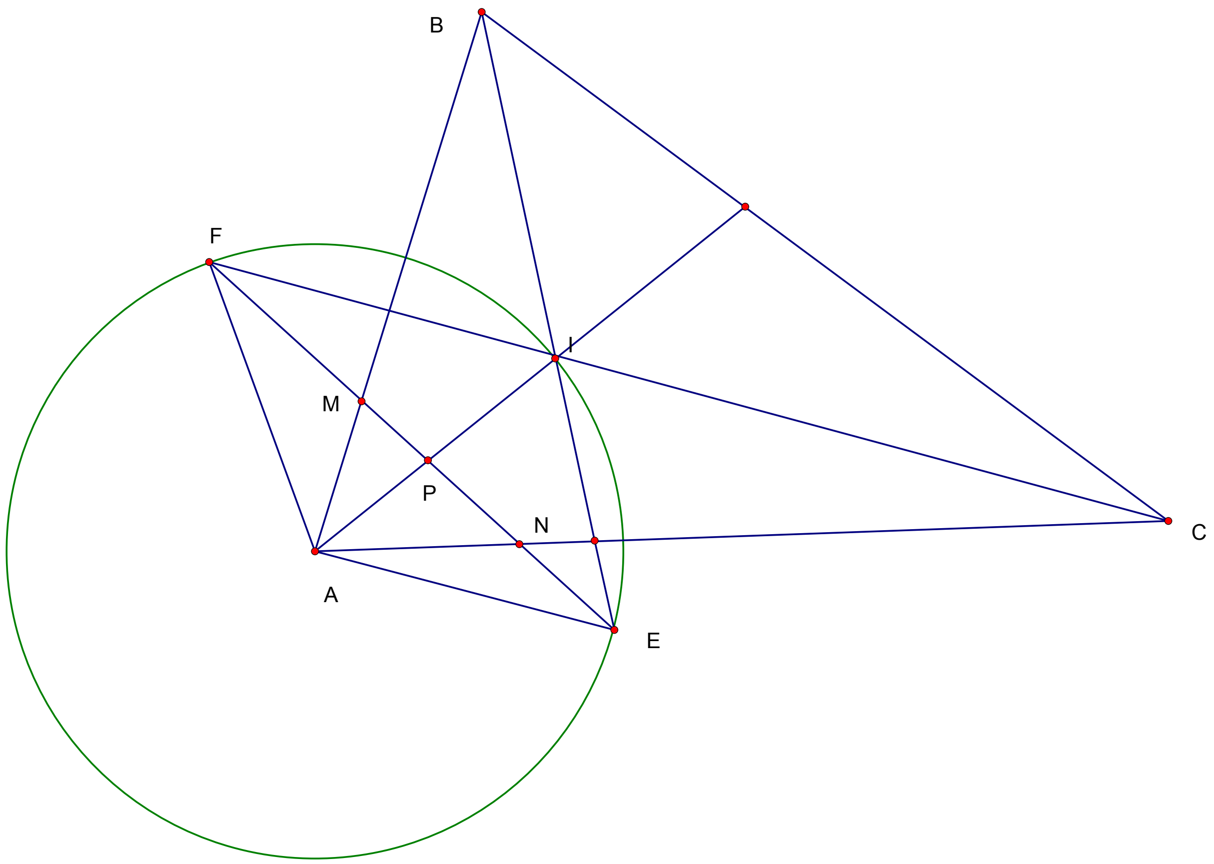
**Լուծում 1:** $3abc=a^2+b^2+c^2\geq a^2+2bc\Rightarrow bc(3a-2)\geq a^2\Rightarrow 3a-2\geq\frac{a^2}{bc}$: Նմանապես $3b-2\geq\frac{b^2}{ac}$ և $3c-2\geq\frac{c^2}{ab}$: Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները կստանանք՝ $(3a-2)(3b-2)(3c-2)\geq\frac{a^2}{bc}\frac{b^2}{ac}\frac{c^2}{ab}=1$:

**Լուծում 2:** $3a=\frac{a^2}{bc}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq\frac{a^2}{bc}+2\sqrt{\frac{b}{c}\frac{c}{b}}=\frac{a^2}{bc}+2\Rightarrow 3a-2\geq\frac{a^2}{bc}$: Նմանապես $3b-2\geq\frac{b^2}{ac}$ և $3c-2\geq\frac{c^2}{ab}$: Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները կստանանք՝ $(3a-2)(3b-2)(3c-2)\geq\frac{a^2}{bc}\frac{b^2}{ac}\frac{c^2}{ab}=1$:

| | |
|---|---|
| Եթե տրվել է որևէ գնահատական | 1 միավոր |
| Եթե տրվել է $3a-2$-ի որևէ գնահատական | 3 միավոր |
| Խնդիրը լուծված է | 7 միավոր |

5) **Ա-4, Բ-4** $I$ –ն $ABC$ եռանկյան կիսորդների հատման կետն է: $A$ կենտրոնով և $IA$ շառավիղով շրջանագիծը $CI$ և $BI$ ուղիղները համապատասխանաբար հատում են $I$ –ից տարբեր $F$ և $E$ կետերում: Դիցուք $EF$ ուղիղը $AB$, $AC, AI$ հատվածները հատում են համապատասխանաբար $M$, $N, P$ կետերում: Ապացուցեք, որ $\frac{PM}{PN} = \frac{PE}{PF}$:

**Լուծում:**




**Լուծում** : Դիցուք $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$ : Այդ դեպքում $\angle AEI = \angle AIE = \alpha + \beta \Rightarrow \angle IAE = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 2\gamma$ ,իսկ $2\gamma = \angle IAE = 2\angle EFI$ ( միևնույն աղեղին հենված ներգծյալ և կենտրոնական անկյուններ), որտեղից $\angle EFC = \gamma = \angle FCN$ : Քանի, որ $\angle AFI = \angle AIF = \alpha + \gamma$ և $\angle EFC = \gamma \Rightarrow \angle AFE = \alpha = \angle AEF$ , հետևաբար $\triangle AMP \sim \triangle AFP$ և $\triangle ANP \sim \triangle AEP$, որտեղից $AP^2 = PM \cdot PF = PN \cdot PE$ , որտեղից $\frac{PM}{PN} = \frac{PE}{PF}$:

| | |
|---|---|
| $\angle IAE = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 2\gamma$ | + 1 միավոր |
| $\angle EFC = \gamma$ | + 2 միավոր |
| $\angle AFE = \angle AEF = \alpha$ | + 1 միավոր |
| $\triangle AMP \sim \triangle AFM$ կամ $\triangle AMP \sim \triangle AFM$ | + 1 միավոր |
| Խնդիրը լուծված է | 7 միավոր |

**Դիտողություն:** Քանի, որ $\angle AFM = \angle MAP$, ուստի $PA$–ն $AFM$ եռանկյան արտագծած շրջանագծի շոշափողն է: -0 միավոր