VIII դասարան, առաջին օր

1) Դիցուք $(x+a)(x+3b)=27$ հավասարման արմատ է հանդիսանում $a+3b$ թիվը: Ապացուցել, որ $ab\le1$:

Լուծում: Քանի, որ $a+3b$ թիվը $(x+a)(x+3b)=27$ հավասարման արմատն է, հետևաբար $(2a+3b)(a+6b)=27$: (+1 միավոր)

Այդ դեպքում՝
$27=(2a+3b)(a+6b)=2(a^2+9b^2)+15ab\ge 2\cdot2\sqrt{a^2\cdot9b^2}+15ab=12|ab|+15ab$ (+ 3 միավոր):

Հետևաբար՝ $4|ab|+5ab\le9$: (+1 միավոր)

Եթե $ab\ge0$,ապա $ab\le1$:

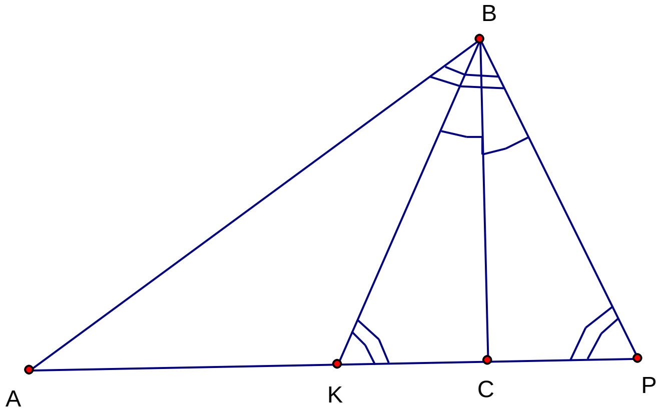
Եթե $ab\le0$,ապա $ab\le9$

Արդյունքում՝ $ab\le1$: (+2 միավոր)

Դիտողություն: Եթե հաշվի չի առվել մոդուլը: (-2 միավոր)

2) $ABC(\angle C = 90^\circ)$ ուղղանկյուն եռանկյան $AC$ էջի վրա տեղադրված է $CK = AB - AC$ հատվածը: Ապացուցել, որ $\angle A = 2\angle CBK$ :

Լուծում 1:




Դիցուք $P$ –ն $K$ –ի համաչափն է $C$ կետի նկատմամբ: (+2 միավոր) Այդ դեպքում $AB = AP$

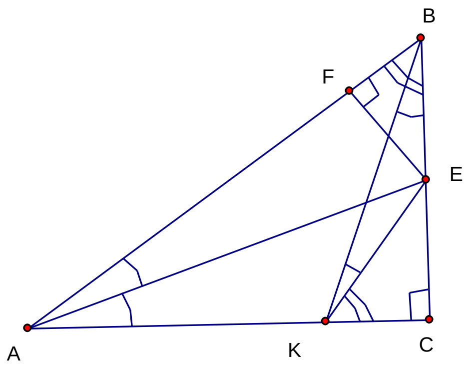
($+1$ միավոր)

և $BK = BP$, որտեղից $\angle ABP = \angle APB = \angle BKP = \alpha$, ($+1$ միավոր)

հետևաբար $\angle BAC = 180^\circ - 2\alpha = 2\left(90^\circ - \alpha\right) = 2\angle CBK$ : ($+3$ միավոր)

Դիտողություն: Որևէ օժանդակ կառուցում: (1 միավոր)

Լուծում 2: Տանենք $AE$ կիսորդը: Դիցուք $EF \perp AB$, հետևաբար $EC = EF$ և $AC = AF$, որտեղից՝ $BF = KC$: : (+2 միավոր)




$\triangle EKC = \triangle BFE$, որտեղից $BE = KE$, հետևաբար $\angle KBE = \angle EKB$ և $\angle EKC = \angle FBE$ : :

(+2 միավոր)

Այդ դեպքում $\angle BAC = \angle BKC - \angle ABK = \angle BKE + \angle EKC - (\angle ABC - \angle KBE) = 2\angle BKE$ ;

(+3 միավոր)

3) 1;2;3;...;37 թվերից կամայական ձևով ընտրված են 13 տարբեր թվեր: Ապացուցել, որ այդ ընտրված 13 թվերի մեջ կգտնվեն չորսը, որոնցից երկուսի գումարը հավասար է մյուս երկուսի գումարին:

Ապացույց: 13 տարբեր թվերից կարելի է կազմել 78 զույգ: +2 միավոր

Յուրաքանչյուր զույգի թվերի գումարը չի գերազանցում 36+37=73: +2 միավոր

Ուստի կգտնվեն երկու զույգեր որոնց թվերի գումարները հավասար են: +1 միավոր

Եթե այդ զույգերի որևէ երկու թվեր համընկնում են, ապա կհամընկնեն նաև մյուս երկուսը, հետևաբար այդ զույգերը կազմված են տարբեր թվերից: +2 միավոր