XI դասարան, առաջին օր

1) 1)Տրված է $f\left(x\right)=x^{2018}+x-a^2$ ֆունկցիան($a$ –ն տրված իրական թիվ է): Ապացուցեք, որ $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ հավասարումը ունի գոնե մեկ իրական արմատ:

Եթե $a=0$, ապա $f\left(f\left(0\right)\right)=0$ ։

Եթե $a\neq 0$, ապա $f\left(0\right)=-a^2<0$ և գոյություն ունի $k\in\square$ այնպես, որ $f\left(k\right)>0$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty\right)$, հետևաբար գոյություն ունի $x_0\in\left(0,k\right)$ այնպես, որ $f\left(x_0\right)=0$ ։

(+2 միավոր)

Դիտարկենք $f\left(x\right)=x_0$ հավասարումը: (+2 միավոր)

Քանի, որ $f\left(0\right)=-a^2-x_0<0$ և գոյություն ունի $m\in\square$ այնպես, որ $f\left(m\right)>0$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty\right)$, հետևաբար գոյություն ունի $x_1\in\left(0,m\right)$ այնպես, որ $f\left(x_1\right)=x_0$ ։

(+1 միավոր)

Այդ դեպքում $f\left(f\left(x_0\right)\right)=f\left(x_1\right)=0$ (+2 միավոր)

2) $ABC$ եռանկյանը ներգծած $I$ կենտրոնով շրջանագիծը $AB$ և $BC$ կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար $E$ և $F$ կետերում: $CI$ ուղիղը $ABC$ եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է $P$ կետում, իսկ $EF$ ուղիղը $CP$ ուղիղը հատում է $T$ կետում: Հայտնի է, որ $PT=TI$ ։ Գտեք $\angle ABC$ ։

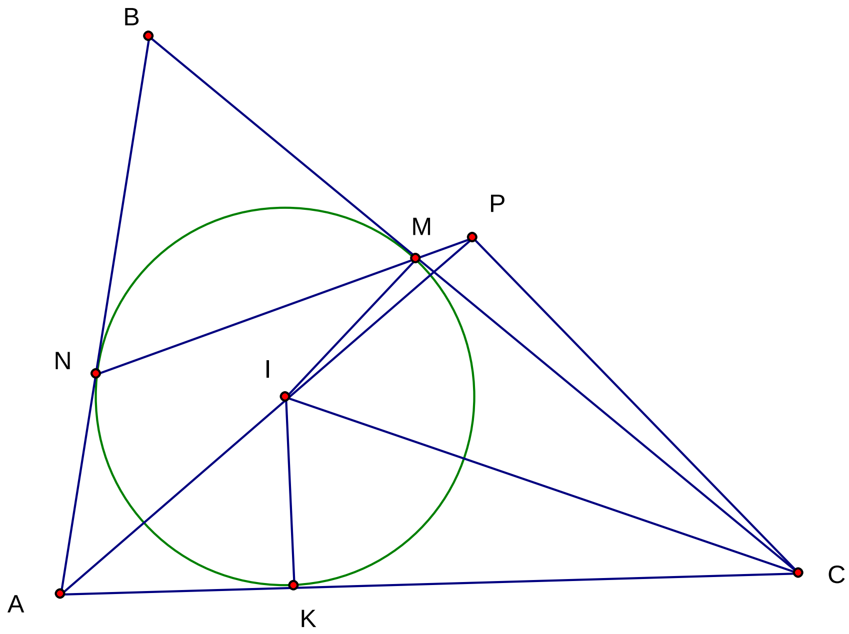
Լուծում:

Լեմմա: $\mathrm{ABC}$ եռանկյան ներգծած շրջանագիծը $\mathrm{AB},\mathrm{BC}$ կողմերը շոշափում է

համապատասխանաբար $N,M$ կետերում ։ Դիցուք $MN$ և $AI$ ուղիղները հատվում են $P$

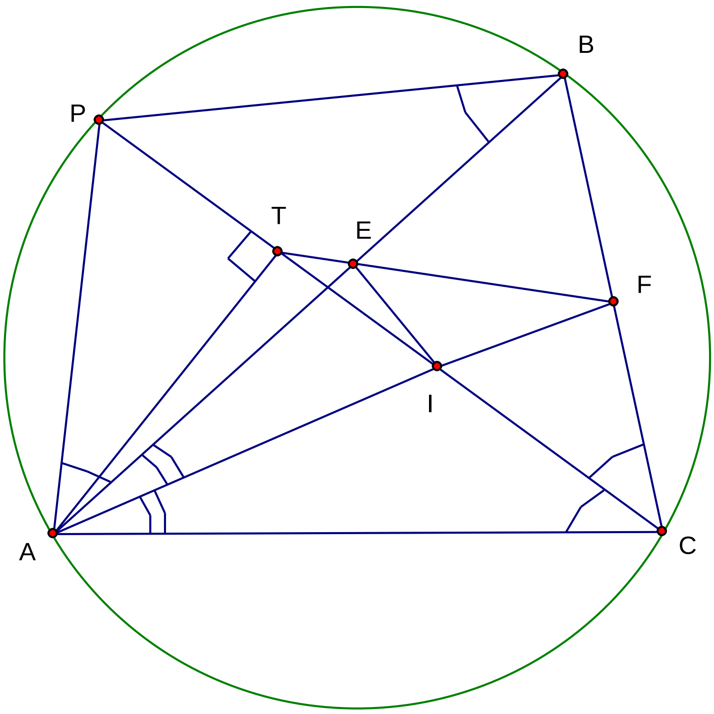
կետում: Ապացուցեք, որ $\angle APC=90^\circ$ ։

Ապացույց:




նկար

Քանի, որ $\angle NPA=\angle BNM-\frac{\angle A}{2}=90^{\circ}-\frac{\angle B}{2}-\frac{\angle A}{2}=\frac{\angle C}{2}$ , հետևաբար $I,M,P,C$ կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\angle IMC=\angle APC=90^{\circ}$ :(+3 միավոր)




Քանի, որ $\angle AIP=\angle IAC+\angle ICA=\angle BAI+\angle PAB=\angle PAI\Rightarrow PA=PI=PB$ :(եռաժանու թեորեմ): (+2 միավոր)

Ըստ լեմմայի $\angle ATC=90^{\circ}$ և $PT=TI$ , հետևաբար $API$ եռանկյունը հավասարակողմ է, որտեղից $\angle API=\angle ABC=60^{\circ}$ (+2 միավոր)

3) Կոորդինատական հարթությունում տրված են $A_1, A_2, \cdots, A_n$ կետերը, որոնցից որևէ երեքը չեն գտնվում մի ուղղի վրա և, որոնց կոորդինատները ամբողջ թվեր են: $(A_i, A_j)$ թվազույգը կանվանենք հետաքրքիր, եթե $A_iA_j$ հատվածի միջնակետի կոորդինատները ամբողջ թվեր են: Գտեք հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը :

Լուծում: Որպեսզի հատվածի միջնակետի կոորդինատները լինեն ամբողջ անհրաժեշտ է, որ նրա ծայրակետերի կոորդինատները լինեն նույն զույգության: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ կետերը ըստ բաժանենք չորս բազմությունների՝ I բազմությանը պատկանող կետերի կոորդինատները զույգ են, II բազմությանը՝ կենտ, III բազմությանը՝ զույգ, կենտ, իսկ IV բազմությանը՝ կենտ, զույգ: (+1 միավոր)

Դիցուք բազմությունների որևէ երկուսի տարրերի քանակը $m$, $p$ է և $m-p>1$: Ապացուցենք, որ

$$C_m^2 + C_p^2 > C_{m-1}^2 + C_{p+1}^2 \Leftrightarrow m(m-1) + p(p-1) > (m-1)(m-1) + (p+1)p \Leftrightarrow m-p>1:$$

(+3 միավոր)

Ըստ ապացուցածի կամայական երկու բազմությունների տարրերի քանակների տարբերությունը հավասար պետք է լինի զրո կամ մեկ:
Եթե $n=4k$, ապա բազմությունների տարրերի քանակը պետք է հավասար լինի $k,k,k,k$ հետևաբար հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը հավասար է

$$4C_k^2 = 2k(k-1) = \frac{n(n-4)}{8}:$$

Եթե $n=4k+1$, ապա բազմությունների տարրերի քանակը պետք է հավասար լինի $k,k,k,k+1$ հետևաբար հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը հավասար է

$$3C_k^2 + C_{k+1}^2 = \frac{3k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{8}:$$

Եթե $n=4k+2$, ապա բազմությունների տարրերի քանակը պետք է հավասար լինի $k,k,k+1,k+1$ հետևաբար հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը հավասար է

$$2C_k^2 + 2C_{k+1}^2 = \frac{(n-2)^2}{8}:$$

Եթե $n=4k+3$, ապա բազմությունների տարրերի քանակը պետք է հավասար լինի $k,k+1,k+1,k+1$ հետևաբար հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը հավասար է

$$C_k^2 + 3C_{k+1}^2 = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{3k(k+1)}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{8}:$$

(+2 միավոր)