XI դասարան, առաջին օր

1)Տրված է $f(x)=x^2+x-a^2$ ֆունկցիան(a –ն տրված իրական թիվ է): Ապացուցեք, որ $f(f(x))=0$ հավասարումը ունի գոնե երկու իրական արմատ:

Լուծում: Եթե $a=0$, ապա $f(f(x))=0$ հավասարման արմատներն են $x=0$ և $x=-1$:

Ենթադրենք $a\neq 0$: Քանի, որ $D=1+4a^2>0$ և $x_1x_2=-a^2<0$, հետևաբար x_1 և x_2-ը տարբեր նշանի են: (+2 միավոր)

Դիցուք $x_1>0$: Դիտարկենք $f(x)=x_1$ հավասարումը: (+2 միավոր)

Քանի, որ $D=1+4\left(a^2+x_1\right)>0$, հետևաբար $f(x)=x_1$ հավասարումը ունի երկու արմատ՝ x_3, x_4 :(+1 միավոր)

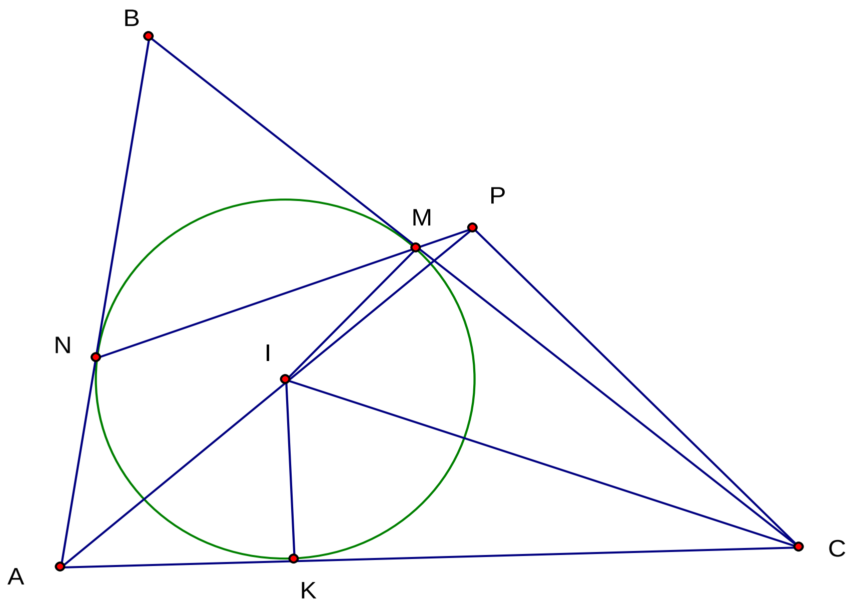
Այդ դեպքում $f(f(x_4))=f(f(x_3))=f(x_1)=0$: (+2 միավոր)

2) ABC եռանկյանը ներգծած I կենտրոնով շրջանագիծը AB և BC կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար E և F կետերում: CI ուղիղը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է P կետում, իսկ EF ուղիղը CP ուղիղը հատում է T կետում: Հայտնի է, որ $PT=TI$: Գտեք $\angle ABC$:

Լուծում:

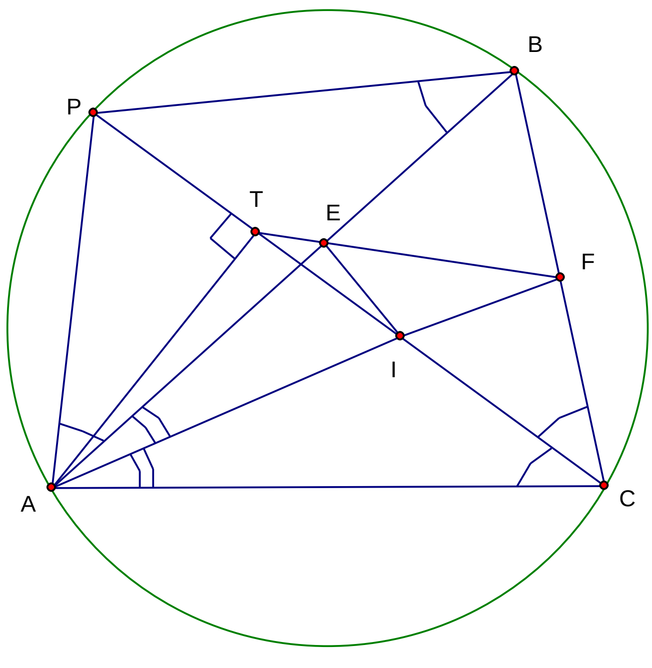
Լեմմա: ABC եռանկյան ներգծած շրջանագիծը AB, BC կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար N, M կետերում : Դիցուք MN և AI ուղիղները հատվում են P կետում: Ապացուցեք, որ $\angle APC=90^\circ$:

Ապացույց:



նկար

Քանի, որ $\angle NPA = \angle BNM - \frac{\angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle C}{2}$, հետևաբար I, M, P, C կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\angle IMC = \angle APC = 90^\circ$:(+3 միավոր)



Քանի, որ $\angle AIP = \angle IAC + \angle ICA = \angle BAI + \angle PAB = \angle PAI \Rightarrow PA = PI = PB$:(եռաժանու թեորեմ): (+2 միավոր)

Ըստ լեմմայի $\angle ATC = 90^\circ$ և $PT = TI$, հետևաբար API եռանկյունը հավասարակողմ է, որտեղից $\angle API = \angle ABC = 60^\circ$ (+2 միավոր)

3) Կոորդինատական հարթությունում տրված են $A_1, A_2, \cdots, A_n$ կետերը, որոնցից որևէ երեքը չեն գտնվում մի ուղղի վրա և, որոնց կոորդինատները ամբողջ թվեր են: (A_i, A_j) թվազույգը կանվանենք հետաքրքիր, եթե A_iA_j հատվածի միջնակետի կոորդինատները ամբողջ թվեր են: Գտեք հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը :

Լուծում: Որպեսզի հատվածի միջնակետի կոորդինատները լինեն ամբողջ անհրաժեշտ է, որ նրա ծայրակետերի կոորդինատները լինեն նույն զույգության: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ կետերը ըստ բաժանենք չորս բազմությունների՝ I բազմությանը պատկանող կետերի կոորդինատները զույգ են, II բազմությանը՝ կենտ, III բազմությանը՝ զույգ, կենտ, իսկ IV բազմությանը՝ կենտ, զույգ: (+1 միավոր)

Դիցուք բազմությունների որևէ երկուսի տարրերի քանակը m, p է և $m-p>1$: Ապացուցենք, որ

$$C_m^2 + C_p^2 > C_{m-1}^2 + C_{p+1}^2 \Leftrightarrow m(m-1) + p(p-1) > (m-1)(m-1) + (p+1)p \Leftrightarrow m-p>1 :$$

(+3 միավոր)

Ըստ ապացուցածի կամայական երկու բազմությունների տարրերի քանակների տարբերությունը հավասար պետք է լինի զրո կամ մեկ:

Եթե $n=4k$, ապա բազմությունների տարրերի քանակը պետք է հավասար լինի k,k,k,k հետևաբար հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը հավասար է

$$4C_k^2 = 2k(k-1) = \frac{n(n-4)}{8} :$$

Եթե $n=4k+1$, ապա բազմությունների տարրերի քանակը պետք է հավասար լինի $k,k,k,k+1$ հետևաբար հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը հավասար է

$$3C_k^2 + C_{k+1}^2 = \frac{3k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{8} :$$

Եթե $n=4k+2$, ապա բազմությունների տարրերի քանակը պետք է հավասար լինի $k,k,k+1,k+1$ հետևաբար հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը հավասար է

$$2C_k^2 + 2C_{k+1}^2 = \frac{(n-2)^2}{8} :$$

Եթե $n=4k+3$, ապա բազմությունների տարրերի քանակը պետք է հավասար լինի $k,k+1,k+1,k+1$ հետևաբար հետաքրքիր թվազույգերի հնարավոր փոքրագույն քանակը հավասար է

$$C_k^2 + 3C_{k+1}^2 = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{3k(k+1)}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{8}$$

: (+2 միավոր)