4) Դիցուք a,b,c թվերն այնպիսին են, որ
$b=\frac{a+c}{a+1}, a=\frac{b+c}{c+1}, b=\frac{a+b}{b+1}$:

Գտեք $(a+1)(b+1)(c+1)$ արտահայտության բոլոր հնարավոր արժեքները:

Լուծում: Քանի, որ $b=\frac{a+c}{a+1} \Rightarrow a(b-1)=c-b$: Եթե
$b=1 \Rightarrow a=c=1 \Rightarrow (a+1)(b+1)(c+1)=8$: +3միավոր

Եթե $a\neq 1, b\neq 1, c\neq 1 \Rightarrow a+1=\frac{c-1}{b-1}$: Նմանապես $c+1=\frac{b-1}{a-1}$ $b+1=\frac{a-1}{c-1}$: +2միավոր

Այդ դեպքում՝ $(a+1)(b+1)(c+1)=\frac{b-1}{a-1}\cdot\frac{a-1}{c-1}\cdot\frac{c-1}{b-1}=1$: +2միավոր

5)Դիցուք $a,b,c>0$ և $abc\geq 1$: Ապացուցեք, որ $\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}$:

Լուծում 1:
Քանի, որ $a^2+2b^2+3=a^2+b^2+b^2+1+2\geq 2ab+2b+2$, հետևաբար +2միավոր

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ac+a+1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{ab^2c+abc+ab}+\frac{b}{abc+ab+b}\right)\leq$$ +3միավոր

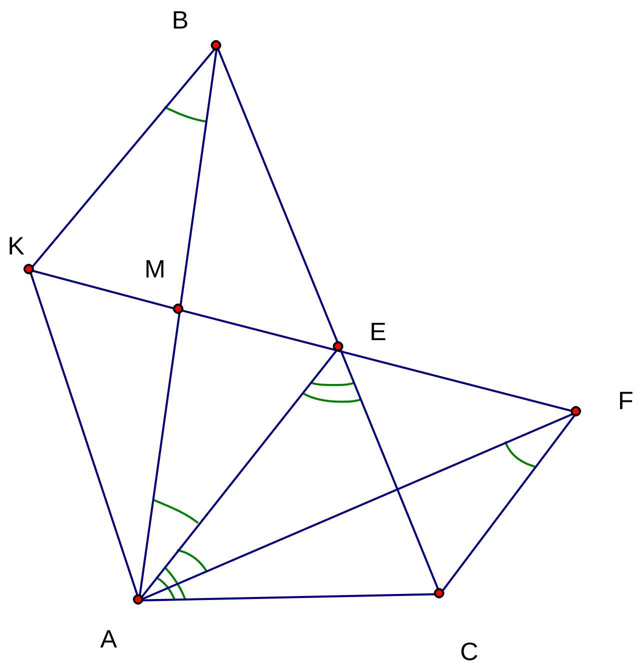
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{b+1+ab}+\frac{b}{ab+b+1}\right)=\frac{1}{2}$$ +2միավոր

6) ABC եռանկյան BC կողմի վրա վերցրել են E կետ այնպես, որ $AC=EC$: C կետից AE ուղղին զուգահեռ ուղղի վրա վերցրել են F կետ այնպես, որ $\angle BAE=\angle EAF$: Ապացուցեք, որ EF ուղիղը AB հատվածը հատում է նրա միջնակետում:

Լուծում1: Վերցնենք K կետ այնպես, որ $AEBK$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է: +2միավոր

Քանի, որ $CF \parallel AE \Rightarrow \angle ACF = 180^\circ - \angle ACF = \angle AEB$ և $\angle AFC = \angle BAE \Rightarrow \triangle AFC \sim \triangle ABE$
+2միավոր

$\Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{FC}{AE} \Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{FC}{BK}$ և $\angle KBE = \angle ECF \Rightarrow \triangle KBE \sim \triangle ECF$, որտեղից $\angle KEB = \angle CEF$,



հետևաբար K,E,F կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա,որտեղից $AM=BM$, քանի, որ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատման կետով կիսվում են: +3միավոր

Լուծում2

Քանի, որ $CF \parallel AE \Rightarrow \angle ACF = 180^\circ - \angle ACF = \angle AEB$ և $\angle AFC = \angle BAE \Rightarrow \triangle AFC \sim \triangle ABE$

$\Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{FC}{AE} \Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{FC}{AE} (1)$: +2միավոր

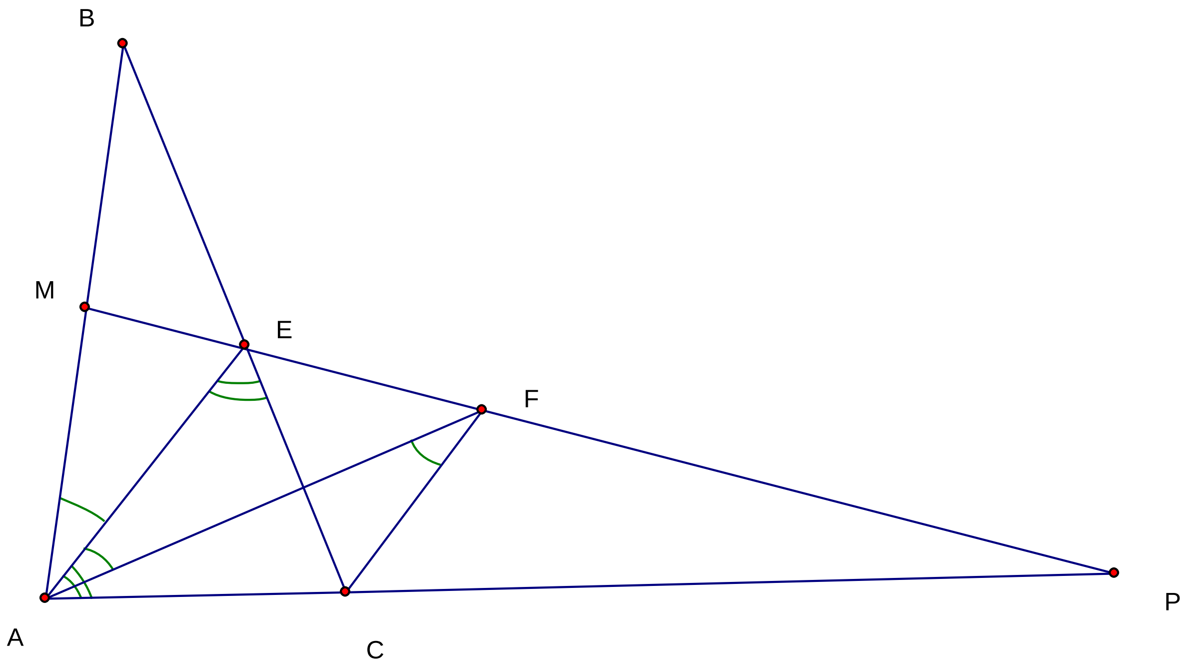
Դիցուք EF և AC ուղիղները հատվում են P կետում: Ըստ Մենելաոսի թեորեմի

$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CP}{AP} = 1$:+1միավոր

Քանի, որ $AE \parallel CF \Rightarrow \frac{AP}{CP} = \frac{AE}{CF}$, ուստի

$$1 = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CP}{AP} = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{AE}{FC} \cdot \frac{CF}{AE} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow AM = BM$$

: +3 միավոր



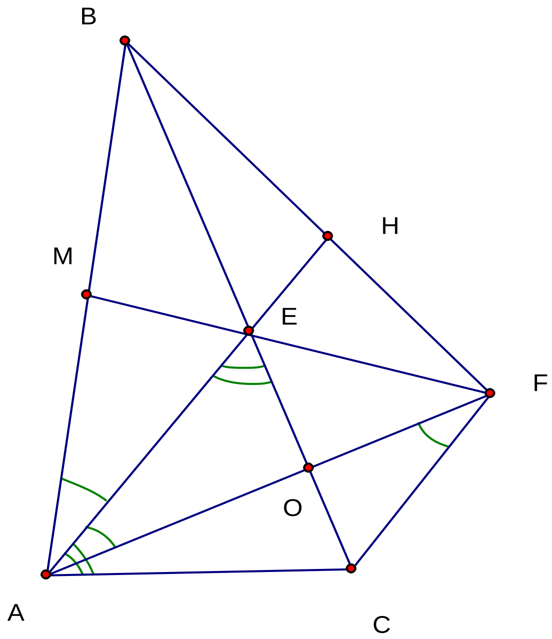
Երբ $EF \parallel AC$, հետևաբար $AE = CF$, որտեղից ըստ (1)-ի $BE = EC \Rightarrow AM = BM$:

+1միավոր

Լուծում3: Քանի, որ $CF \parallel AE \Rightarrow \angle ACF = 180^\circ - \angle ACF = \angle AEB$ և

$\angle AFC = \angle BAE \Rightarrow \triangle AFC \sim \triangle ABE$ +2միավոր

$\Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{FC}{AE}$:



Դիցուք AE և BF ուղիղները հատվում են H կետում: Ըստ Չևայի թեորեմի

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BH}{HF}\cdot\frac{FO}{AO}=1$$

: +1 միավոր

Քանի, որ $AE \parallel CF \Rightarrow \frac{FO}{AO}=\frac{FC}{AE}$ և ըստ կիսորդի հատկության՝ $\frac{AB}{AF}=\frac{BH}{FH}$, +2միավոր

ուստի $1=\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BH}{HF}\cdot\frac{FO}{AO}=\frac{AM}{BM}\cdot\frac{AB}{AF}\cdot\frac{CF}{AE}=\frac{AM}{BM}\Rightarrow AM=BM$: +2միավոր