

X դասարան, երկրորդ օր

4) Դիցուք x, y, z թվերը բավարարում են $x^2 + y^2 = 2z^2$ հավասարությանը: Գտեք $2z^2 - xz - yz$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը:

Լուծում 1:
$$2z^2 - xz - yz = z^2 + z^2 - xz - yz = z^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} - xz - yz = \frac{(z-x)^2 + (z-y)^2}{2} \geq 0$$
 :

Լուծում 2: Քանի, որ
$$z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \frac{(x+y)^2}{4}$$
 2 միավոր

հետևաբար $|2z| \geq |x+y| \Rightarrow 2z^2 \geq |xz+yz|$: **+2 միավոր**

Այդ դեպքում $2z^2 - xz - yz \geq |xz+yz| - z(x+y) \geq 0$, քանի, որ $|a| \geq a$ անհավասարությունը ճիշտ է կամայական a -ի դեպքում: **+3 միավոր**

5) Դիցուք p_1, p_2, \dots, p_k թվերը $n > 1$ բնական թվի և n -ից փոքր բոլոր բնական թվերի բաժանելուց ստացված զույգ առ զույգ տարբեր մնացորդներն են: Գտեք n -ի բոլոր արժեքները այնպես, որ $p_1 + p_2 + \dots + p_k > n$:

Լուծում: Դիցուք $n = 2m$: Այդ դեպքում n -ից փոքր բոլոր բնական թվերի բաժանելուց ստացված զույգ առ զույգ տարբեր մնացորդները $1, 2, \dots, m-1$ թվերն են, **1 միավոր**

հետևաբար
$$1 + 2 + \dots + m - 1 > 2m \Leftrightarrow \frac{(m-1)m}{2} > 2m \Leftrightarrow m > 5$$
 +2 միավոր

Եթե $n = 2m + 1$: Այդ դեպքում n -ից փոքր բոլոր բնական թվերի բաժանելուց ստացված զույգ առ զույգ տարբեր մնացորդները թվերն են $1, 2, \dots, m$, հետևաբար

$$1 + 2 + \dots + m > 2m \Leftrightarrow \frac{(m+1)m}{2} > 2m + 1 \Leftrightarrow m > 4$$
, հետևաբար $n = 9$ և $n > 10$:

+3 միավոր

6) AA_1, BB_1, CC_1 հատվածները ABC սուրանկյուն եռանկյան միջնագծերն են: AA_1

տրամագծով շրջանագիծը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է A_2 կետում:

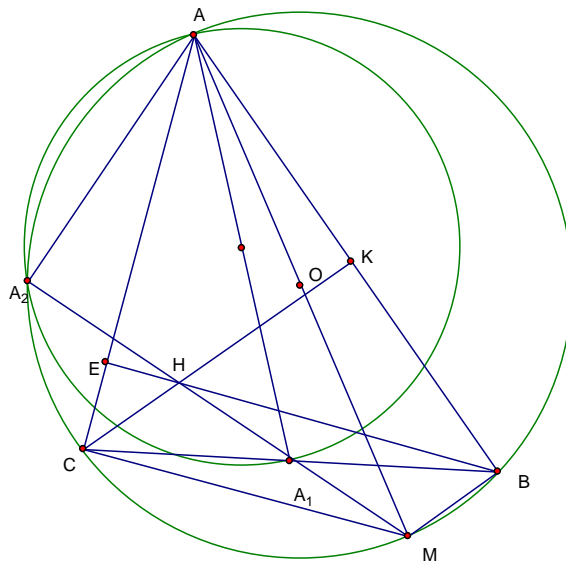
Նմանապես որոշվում են B_2, C_2 կետերը: Ապացուցեք, որ A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ուղիղները

հատվում են մեկ կետում:

Ապացույց: Դիցուք AO -ը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է M կետում:

Այդ դեպքում AM -ը տրամագիծ է, հետևաբար $\angle ABM = 90^\circ$:

1միավոր



Դիցուք CK -ն ABC եռանկյան

բարձրությունն է և հատում է A_1A_2 -ը H կետում: $\angle ABM = \angle CKB = 90^\circ \Rightarrow CH \parallel MB$

+2միավոր

$\angle AA_2A_1 = 90^\circ$ և $\angle AA_2M = 90^\circ$ հետևաբար A_2, A_2, M կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա:

+1 միավոր

Հետևաբար $CA_1 = BA_1 \Rightarrow CHBM$ -ը գուրահեռագիծ է, որտեղից $BH \parallel CM$ և $\angle ACM = 90^\circ$

ուստի $BH \perp AC$, հետևաբար H -ը ABC եռանկյան օրթոկենտրոնն է:

Նմանապես $H \in B_1B_2, H \in C_1C_2$:

+3միավոր