# Առաջադրանքներ և լուծումներ

## VIII դասարան

1. Գտեք $(x, y)$ բոլոր թվազույգերը, որոնք բավարարում են $\frac{x+6}{y}+\frac{13}{xy}=\frac{4-y}{x}$ հավասարությանը:

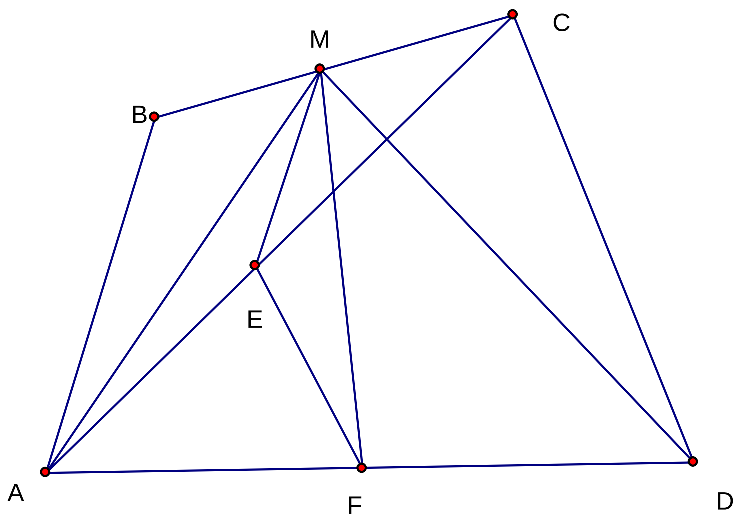
Լուծում: $\frac{x+6}{y}+\frac{13}{xy}=\frac{4-y}{x} \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=0 \Rightarrow x=-3,\ y=2$:

2. Գոյությու՞ն ունի n բնական թիվ այնպես, որ $2^{2012}+2^{2015}+2^{n}$ արտահայտության արժեքը բնական թվի քառակուսի է:

Լուծում: Երբ $n=2016$, ապա $2^{2012}+2^{2015}+2^{2016}=2^{2012}\cdot 1+2^3+2^4 = 2^{1006}\cdot 5^{\ 2}$:

3.ABCD ուռուցիկ քառանկյունում M–ը BC կողմի միջնակետն է, իսկ $\angle AMD=90^{o}$: Ապացուցեք, որ $AB+CD\geq AD$: Ե՞րբ տեղի ունի հավասարության դեպքը:

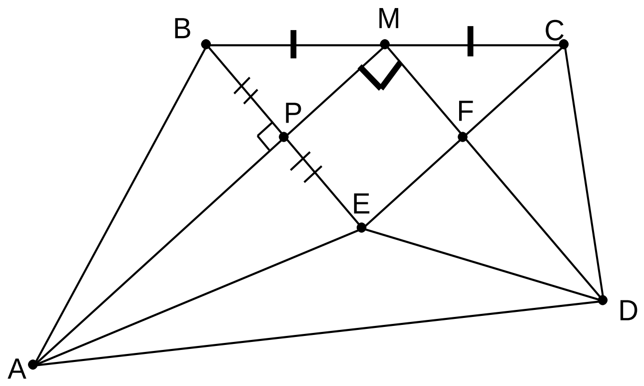
Լուծում: **1-ին եղանակ** Դիցուք $AE=EC$ և $AF=FD$: Այդ դեպքում $ME=\frac{AB}{2}$, $EF=\frac{CD}{2}$ և $MF=\frac{AD}{2}$:




$EM+EF\geq MD \Rightarrow \frac{AB}{2}+\frac{CD}{2}\geq\frac{AD}{2}$ , ուստի

$AB+CD\geq AD$: Հավասարության դեպքը տեղի ունի երբ $E\in MF$ , այսինքն երբ $AB \| CD$ :

**2-րդ եղանակ** Տանենք $BE \parallel MD$ և $CE \parallel AM$ : Ըստ Թալեսի թեորեմի $BP = PE$ : Քանի որ $AP \perp BE$ , ապա $AE = AB$ : Նման ձևով $DE = CD$ :




$AB + CD = AE + ED \geq AD$ :

4. Ապացուցել, որ 14 եռանիշ թվերից կարելի է ընտրել երկուսն այնպես, որ նրանց կցագրումից ստացված վեցանիշ թիվը բաժանվի 13-ի:

Լուծում: $\overline{abcefk} = 1001 \cdot \overline{abc} + \overline{efk} - \overline{abc}$ **: Քանի,որ 1001-ը բաժանվում է 13-ի, ապա** ըստ **Դիրիխլեյի** սկզբունքի 14 թվերի մեջ գոյություն ունեն երկու թվեր, որ նրանց տարբերությունը բաժանվում է 13-ի:

## IX դասարան

1. Գտեք $\overline{abccba}$ տեսքի բոլոր վեցանիշ թվերի քանակը, որոնք բաժանվում են 143-ի:

Լուծում: $\overline{abccba} = 1001 \cdot \overline{abc} + \left(\overline{cba} - \overline{abc}\right) = 1001 \cdot \overline{abc} + 99\left(c - a\right)$ և $1001 \vdots 11 \Rightarrow a = c$ : Քանի, որ $b \in \{0;1;\ldots;9\}$ , հետևաբար խնդրին բավարարող թվերի քանակը հավասար է 90-ի:

2. Գտեք բոլոր $p$ պարզ թվերն, որոնց համար $\left(p^2 - 23\right)\left(9p + 5\right)$ թիվը լրիվ քառակուսի է:

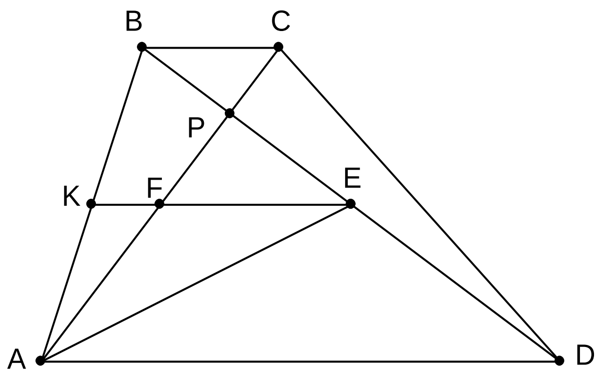
Լուծում: . $p = 5 \Rightarrow A(p) = (p^2 - 23)(9p + 5) = 100$ : Ենթադրենք՝ $p > 5$ : Այդ դեպքում $A(p)$ -ն $p \neq 5k$ թվերի վրա բաժանելիս մնացորդում տալիս է 2 կամ 3, իսկ լրիվ քառակուսին 5-ի վրա բավանելիս նման մնացորդներ չի տալիս:

3. Իրարից տարբեր 20 բնական թվերից իննը բաժանվում են 19-ի, ութը բաժանվում են 18-ի, իսկ յոթը բաժանվում են 17-ի: Ապացուցել, որ այդ թվերից գոնե մեկը մեծ է 600-ից:

Լուծում: Լուծում: Դիցուք A–ն 19-ի վրա բաժանվող թվերի բազմությունն է, B-ն՝ 18-ի, իսկ C–ն՝ 17-ի: Եթե գոյություն ունի թիվ, որը միաժամանակ բաժանվում է և 17-ի, և 18-ի, և 19-ի, ապա այդ թիվը մեծ է 600-ից: Ենթադրենք այդպիսի թիվ գոյություն չունի: Այդ դեպքում $\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|A \cap C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|$, որտեղ $\left|X\right|$ -ը $X$ բազմությանը պատկանող տարրերի քանակն է: Քանի, որ $\left|A \cap B \cap C\right| = 0, \left|A\right| = 9, \left|B\right| = 8, \left|C\right| = 7$ և $\left|A \cup B \cup C\right| \leq 20$ ,հետևաբար $\left|A \cap B\right| + \left|A \cap C\right| + \left|B \cap C\right| \geq 4$ ,հետևաբար գոյություն ունի առնվազն 4 թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 17, 18, 19 թվերի որևէ զույգի արտադրյալի վրա, հետևաբար $|A\cap B|,|A\cap C|,|B\cap C|$ թվերից որևէ մեկը մեծ է կամ հավասար են 2-ից: Այդ դեպքում գոյություն ունի $a,b$ թվեր, որոնք բաժանվում է 17, 18, 19 թվերի որևէ զույգի արտադրյալի վրա , հետևաբար $\max\{a,b,\}\ge 2\cdot 17\cdot 18>600$:

4. ABCD( $BC \parallel AD$ ) սեղանում հայտնի է, որ BD=2AB և AD=3BC: Ապացուցեք, որ CAD անկյան կիսորդը BD անկյունագիծը հատում է նրա միջնակետում:

Լուծում: Դիցուք $BE=ED,\ AF=FC,\ AK=KB \Rightarrow KE \parallel AD \parallel BC$: $AC$ և $BD$ անկյունագծերի հատման կետը նշանակենք՝ $P$ : $AK=KB=a \Rightarrow BE=ED=2a$:




$KF=b \Rightarrow BC=2b \Rightarrow AD=6b \Rightarrow EF=2b \Rightarrow$ , որ $F$ -ը $ABE$ հավասարասրուն եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է, ուստի $AP$ -ն նույնպես միջնագիծ է և $AF=FE \Rightarrow \angle FAE=\angle FEB=\angle EAD$:

<u>Դիտողություն:</u> $BP=PE$ պնդումը կարելի է ապացուցել $BCP$ և $APD$ եռանկյունների նմանությունից:

**X դասարան**

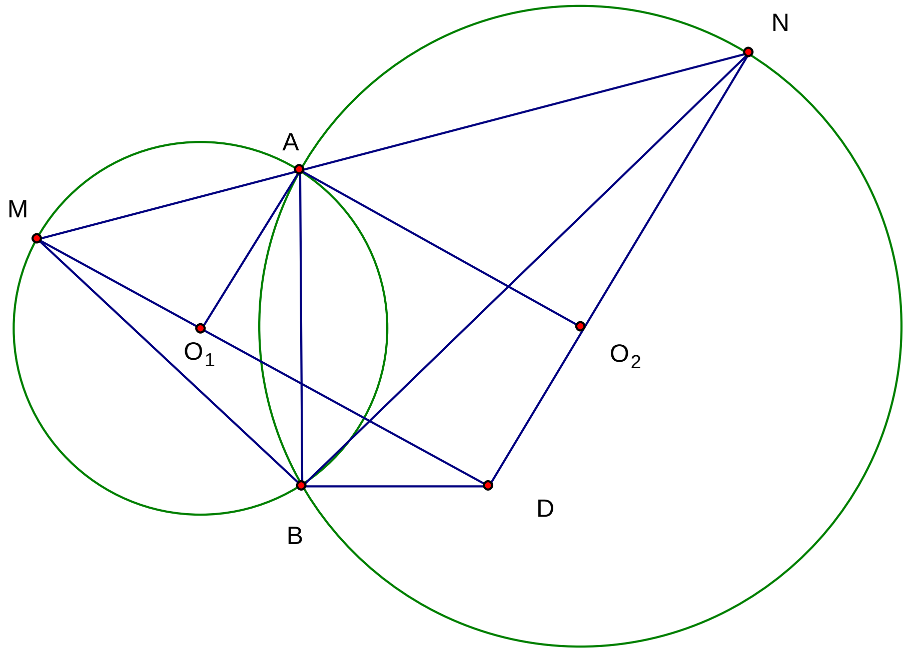
1. Գտեք $\overline{abccba}$ տեսքի բոլոր վեցանիշ թվերի քանակը, որոնք բաժանվում են 77-ի, բայց չեն բաժանվում 13-ի:

Լուծում: Քանի, որ $\overline{abccba}=1001\cdot\overline{abc}+\left(\overline{cba}-\overline{abc}\right)=1001\cdot\overline{abc}+99(c-a)$ և $|c-a|<13$ ,հետևաբար $|c-a|=7$ և $c\neq a$ , որտեղից $(c,a)=\{(0,7),(8,1),(1,8),(2,9),(9,2)\}$ : Քանի, որ $b\in\{0;1;\ldots;9\}$ , հետևաբար խնդրին բավարարող թվերի քանակը հավասար է 50-ի:

2. . $O_1$ և $O_2$ կենտրոններով $\omega_1$ և $\omega_2$ շրջանագծերը հատվում են A և B կետերում: A կետով անցնող ուղիղը $\omega_1$ և $\omega_2$ շրջանագծերը հատում է համապատասխանաբար M և N

կետերում(A–ն գտնվում է M և N կետերի միջև): Դիցուք $MO_1$ և $NO_2$ ուղիղները հատվում են D կետում: Ապացուցեք, որ կետերը M,B,D,N պատկանում են մեկ շրջանագծի:

Լուծում:




Դիցուք $\angle MO_1A = 2\alpha$ և $\angle AO_2M = 2\beta$: Հետևաբար $\angle AMO_1 = \angle MAO_1 = 90^{\circ} - \alpha$ , $\angle NAO_2 = \angle ANO_2 = 90^{\circ} - \beta$ , $\angle MBA = \alpha, \angle NBA = \beta$, ուստի $\angle MON = \angle NBM = \alpha + \beta$, հետևաբար M,B,D, N կետերով անցնում է շրջանագիծ:

3.Իրարից տարբեր 20 բնական թվերից իննը բաժանվում են 19-ի, ութը բաժանվում են 18-ի, իսկ ութը բաժանվում են 17-ի: Ապացուցել, որ այդ թվերից գոնե մեկը մեծ է 645-ից:

Լուծում: Դիցուք A–ն 19-ի վրա բաժանվող թվերի բազմությունն է, B-ն՝ 18-ի, իսկ C–ն՝ 17-ի: Եթե գոյություն ունի թիվ, որը միաժամանակ բաժանվում է և 17-ի, և 18-ի, և 19-ի, ապա այդ թիվը մեծ է 645-ից: Ենթադրենք այդպիսի թիվ գոյություն չունի: Այդ դեպքում $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$, որտեղ $|X|$-ը $X$ բազմությանը պատկանող տարրերի քանակն է: Քանի, որ $|A \cap B \cap C| = 0, |A| = 9, |B| = 8, |C| = 8$ և $|A \cup B \cup C| \leq 20$,հետևաբար $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \geq 5$,հետևաբար գոյություն ունի առնվազն 5 թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 17, 18, 19 թվերի որևէ զույգի արտադրյալի վրա: Հնարավոր է երկու դեպք:

1. $|A\cap B|,|A\cap C|,|B\cap C|$ թվերից մեկը մեծ է կամ հավասար է 3-ից: Այդ դեպքում գոյություն ունի $a,b,c$ թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 17, 18, 19 թվերի որևէ զույգի արտադրյալի վրա, հետևաբար $\max\{a,b,c\}\geq 3\cdot 17\cdot 18>645$:

2. $|A\cap B|,|A\cap C|,|B\cap C|$ թվերից որևէ երկուսը հավասար են 2-ի: Այդ դեպքում գոյություն ունի $a,b,c,d$ թվեր, որոնցից երկուսը բաժանվում է 17, 18, 19 թվերի որևէ զույգի արտադրյալի վրա և գոյություն ունեն երկուսը, որոնք բաժանվում են 17, 18, 19 թվերի մեկ այլ զույգի արտադրյալի վրա, հետևաբար $\max\{a,b,c,d\}\geq 2\cdot 17\cdot 19>645$:

4. $x,y,z$ իրական թվերը այնպիսին են,որ $x\geq 4, y\geq 5, z\geq 6$ և $x^2+y^2+z^2\geq 90$: Ապացուցեք, որ $x+y+z\geq 16$:

Լուծում: Դիցուք $x-4=a\geq 0, y-5=b\geq 0$ և $z-6=c\geq 0$: Այդ դեպքում $(a+4)^2+(b+5)^2+(c+6)^2\geq 90$ և $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$ պայմաններից պետք է ապացուցել, որ $a+b+c\geq 1$: Եթե $a,b,c$ թվերից որևէ մեկը մեծ է կամ հավասար 1-ից, ապա խնդիրը ճիշտ է: Ենթադրենք $0\leq a,b,c<1$: Այդ դեպքում

$$90\leq (a+4)^2+(b+5)^2+(c+6)^2=a^2+b^2+c^2+8a+10b+12c+77<$$

$$a+b+c+8a+10b+12c+77=9a+11b+13c+77<13(a+b+c)+77$$

, հետևաբար $a+b+c>1$:

## XI-XII դասարան

1. Գտեք բոլոր $(x,y)$ բնական թվերի թվազույգերը այնպես, որ $\dfrac{4(xy+1)}{(x+y)^2}$ հարաբերությունը ամբողջ թիվ է:

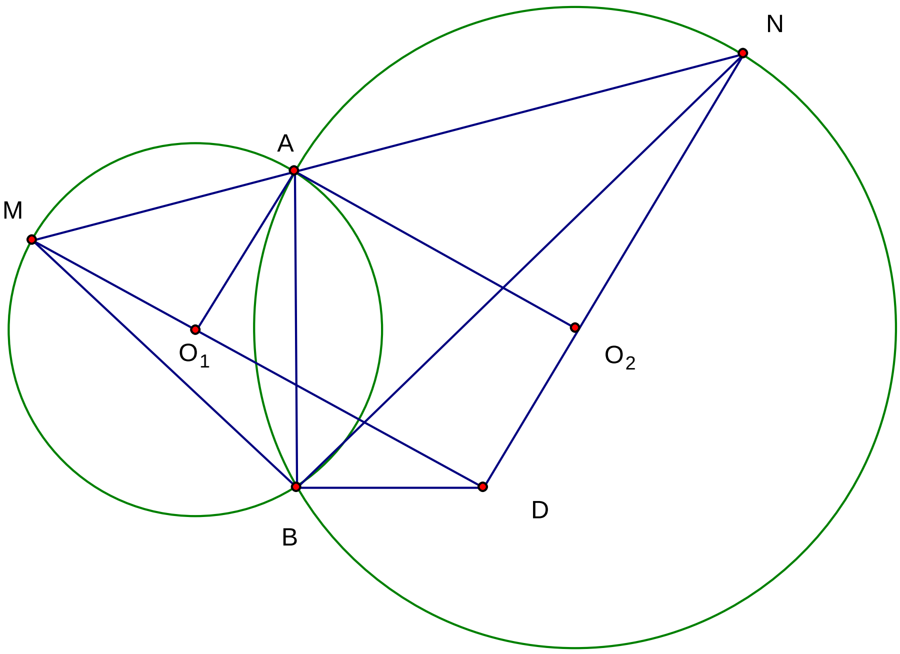
Լուծում: $P(x,y)=\dfrac{4(xy+1)}{(x+y)^2}\leq \dfrac{4xy+4}{4xy}=1+\dfrac{1}{xy}\leq 2$:

1. $P(x,y)=2\Rightarrow x=y=1$:

2. $P(x,y)=1\Rightarrow |x-y|=2$, հետևաբար՝ $(1,1),(n+2,n),(m,m+2),n,m\in N$ :

2. $O_1$ և $O_2$ կենտրոններով $\omega_1$ և $\omega_2$ շրջանագծերը հատվում են A և B կետերում: A կետով անցնող ուղիղը $\omega_1$ և $\omega_2$ շրջանագծերը հատում է համապատասխանաբար M և N կետերում(A–ն գտնվում է M և N կետերի միջև): Դիցուք $MO_1$ և $NO_2$ ուղիղները հատվում են D կետում: Ապացուցեք, որ կետերը M,B,D,N պատկանում են մեկ շրջանագծի:

Լուծում:




Դիցուք $\angle MO_1A = 2\alpha$ և $\angle AO_2M = 2\beta$ : Հետևաբար $\angle AMO_1 = \angle MAO_1 = 90^o - \alpha$ , $\angle NAO_2 = \angle ANO_2 = 90^o - \beta$ , $\angle MBA = \alpha, \angle NBA = \beta$, ուստի $\angle MON = \angle NBM = \alpha + \beta$ , հետևաբար M,B,D, N կետերով անցնում է շրջանագիծ:

3. $x, y, z$ իրական թվերը այնպիսին են,որ $x \geq 4, y \geq 5, z \geq 6$ և $x^2 + y^2 + z^2 \geq 90$ : Ապացուցեք, որ $x + y + z \geq 16$ :

Լուծում: Դիցուք $x - 4 = a \geq 0, y - 5 = b \geq 0$ և $z - 6 = c \geq 0$ : Այդ դեպքում $(a+4)^2 + (b+5)^2 + (c+6)^2 \geq 90$ և $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ պայմաններից պետք է ապացուցել, որ $a + b + c \geq 1$ : Եթե $a, b, c$ թվերից որևէ մեկը մեծ է կամ հավասար 1-ից, ապա խնդիրը ճիշտ է: Ենթադրենք $0 \leq a, b, c < 1$ : Այդ դեպքում

$$90 \leq (a+4)^2 + (b+5)^2 + (c+6)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 8a + 10b + 12c + 77 <$$
$$a + b + c + 8a + 10b + 12c + 77 = 9a + 11b + 13c + 77 < 13(a + b + c) + 77$$

, հետևաբար $a + b + c > 1$ :

4. $\{a_n\}$ հաջորդականությունում՝ $a_1 = 1, a_n = k_n \cdot a_{n-1}$ , որտեղ $k_n \in \{2; 3; \ldots; 9\}$ , ընդ որում $k_n$ –ը ընդունում է $2; 3; \ldots; 9$ արժեքներից յուրաքանչյուրը գոնե մեկ անգամ: Ապացուցեք, որ գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ $n$ բնական թվեր, որ $s(a_{n+1}) \leq s(a_n)$ , որտեղ $s(x)$ – ը $x$ բնական թվի թվանշանների գումարն է:

Լուծում: Ենթադրենք $\{a_n\}$ հաջորդականության $s(a_{n+1}) \le s(a_n)$ պայմանին բավարարող անդամների քանակը վերջավոր է: Այդ դեպքում $\{a_n\}$ հաջորդականության անդամները ինչ-որ $a_l = b_0$ -ից սկսած բաժանվում են 9-ի և նրանց թվանշանների գումարի $s(b_i), (i = 0,1,2,\ldots)$ հաջորդականությունը աճող է: Եթե $\{b_l\}$ հաջորդականությում $b_i \vdots 9$ և $s(b_{i+1}) > s(b_i)$, հետևաբար $s(b_{i+1}) - s(b_i) \ge 9$, որտեղից $s(b_k) \ge 9k$, իսկ մյուս կողմից՝ $b_k \le b_0 \cdot 9^k$: Քանի, որ $s(b_k) \ge 9k$, հետևաբար $b_k \ge 10^k$, որտեղից $10^k \le b_k \le b_0 \cdot 9^k$: Ստացվեց, որ $\left(\frac{10}{9}\right)^k \le b_0$ անհավասարությունը տեղի ունի կամայական $k \in N$ թվերի համար, որը խախտվում է, երբ $k > \log_{\frac{10}{9}}^{b_0}$: