

Ա.Շահինյանի ծննդյան 110-ամյակին նվիրված միջվարժարանային  
օլիմպիադա

Մաթեմատիկա - 10-րդ դասարան

1. Հայտնի է, որ գոյություն ունեն  $m$  և  $n$  ամբողջ թվեր այնպիսին, որ  $\frac{n^{2016}}{m-n}$  թիվը ամբողջ է: Ապացուցել, որ  $\frac{m^{2017}}{m-n}$  թիվը նույնպես ամբողջ է:
2. Ապացուցել, որ եթե  $a, b, c \geq 0$  և  $a+b+c=1$ , ապա
$$(a^3 + b^3 + c^3)(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{1}{12}:$$
3. Դիցուք  $P$  կետը  $ABC$  սուրանկյուն եռանկյան ներքին կետ է:  $AC$  և  $BC$  կողմերի վրա համապատասխանաբար նշված են  $M$  և  $K$  կետերը, այնպես, որ  $\angle PMC = \angle PKC = 90^\circ$ : Ապացուցել, որ եթե  $M$  և  $K$  կետերը հավասարահեռ են  $AB$  հատվածի միջնակետից, ապա  $\angle PBC = \angle PAC$ :
4.  $X$  բազմությունը բաղկացած է 6 զույգ առ զույգ տարբեր տարրերից: Դիցուք  $A_1, A_2, \dots, A_9$ -երը  $X$  բազմության ենթաբազմություններ են, որոնցից յուրաքանչյուրը բաղկացած է իրարից զույգ առ զույգ տարբեր երեք տարրերից: Ապացուցել, որ գոյություն ունի  $X$ -ի տարրերի երկու գույնով այնպիսի «գունավորում», որ յուրաքանչյուր  $A_i, 1 \leq i \leq 9$  ենթաբազմություն կպարունակի առնվազն երկու տարբեր գույների տարրեր: