ԿՈՐՅՈՒՆ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
ՀԱՅԿԱԶՆ ՆԱՎԱՍԱՐԴՅԱՆ
ԱՐՄԱՆ ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

8-րդ դասարան

Երևան 2016

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻՆ ԱՌԸՆԹԵՐ
ԱՐՏԱՇԵՍ ՇԱՀԻՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ
ՀԱՏՈՒԿ ԴՊՐՈՑ

Ձեռնարկը համապատասխանեցված է ԿԳ նախարարության կողմից հաստատված մաթեմատիկայի մասնագիտացման ուղղվածության ծրագրին

Նախաբան

Մաթեմատիկական կրթությունը և մաթեմատիկական մտածելակերպն անհրաժեշտ են ոչ միայն նրանց, ովքեր հետագայում կզբաղվեն մաթեմատիկայով կամ գիտական որևէ հետազոտությամբ, այլ նաև բոլոր նրանց, ովքեր կաշխատեն ժողովրդական տնտեսության տարբեր բնագավառներում:

Կրթության գործընթացում մաթեմատիկական խնդիրներն ունեն ուսուցողական, գործնական և դաստիարակչական նշանակություն: Նրանք զարգացնում են սովորողների ալգորիթմական, տրամաբանական մտածողությունը, մշակում մաթեմատիկան կիրառելու գործնական հմտություններ, ձևավորում աշխարհայացք: Խնդիրների լուծումը նրանց մղում է ստեղծագործական աշխատանքի:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերում զետեղված խնդիրները, որպես կանոն, նպատակաուղղված են տվյալ թեմայի տեսական նյութի յուրացմանը: Սահմանափակվելով միայն դասագրքում ընդգրկված խնդիրներով՝ սովորողների մոտ կարող են ձևավորվել միայն սերտողական բնույթի գիտելիքներ: Միօրինակ կամ միայն ալգորիթմական խնդիրները չեն կարող ապահովել սովորողների մտավոր զարգացմանը ներկայացվող պահանջներին:

Մաթեմատիկայի նկատմամբ հակումներ ունեցող սովորողները չեն բավարարվում մաթեմատիկայի դասերին ստացած գիտելիքներով, հետևաբար և ցանկություն է առաջանում ավելի շատ տեղեկություն ստանալ իրենց սիրած առարկայի մասին, իմանալ, թե ինչպես է այն կիրառվում կյանքում, լուծել հետաքրքիր և ավելի բարդ խնդիրներ:

Սույն ձեռնարկում ընդգրկված նյութերը կարող են նպաստել մաթեմատիկական գիտելիքների ընդլայնմանը, ծրագրային նյութը խորությամբ յուրացնելուն, տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, հետազոտական ունակությունների ձևավորմանը, ինչպես նաև՝ մաթեմատիկական խոսքի կուլտուրայի զարգացմանը:

Գիրքը նախատեսված է մասնագիտացված դպրոցների, բնագիտամաթեմատիկական թեքումով 8-րդ դասարանի սովորողների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցիչներին՝ արտադասարանական պարապմունքներ անցկացնելու, ինչպես նաև աշակերտներին՝ մաթեմատիկական օլիմպիադաներին նախապատրաստվելու համար:

§ 1. ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐ
ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ

ՏԵՍԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԻ ՀԱՄԱՌՈՏ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆ

1. Բաժանում առանց մնացորդի և մնացորդով

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ թվերն անվանում են **բնական** կամ **դրական ամբողջ** թվեր:

$-n$ տեսքի թվերը, որտեղ n-ը բնական թիվ է, կոչվում են **բացասական ամբողջ** թվեր:

Բոլոր բնական թվերը, զրոն և բոլոր բացասական ամբողջ թվերը կազմում են **ամբողջ թվերի** բազմությունը:

Ընդունված է բնական թվերի բազմությունը նշանակել N-ով, ամբողջ թվերի բազմությունը՝ Z-ով, ոչբացասական ամբողջ թվերի բազմությունը՝ Z_0:

Այն փաստը, որ m-ը բնական թիվ է, գրառվում է այսպես՝ $m \in N$ (կարդացվում է՝ m-ը պատկանում է N բազմությանը): $k \in Z$ գրառումը նշանակում է, որ k-ն ամբողջ թիվ է:

Դիցուք, a-ն և b-ն բնական թվեր են:

Ասում են, որ a թիվը **բաժանվում է** b թվի, եթե գոյություն ունի այնպիսի բնական q թիվ, որ $a = bq$ (բաժանում առանց մնացորդի):

Այդ դեպքում a-ն կոչվում է b-ի **բազմապատիկ**, իսկ b-ն՝ a-ի բաժանարար: Այն փաստը, որ a-ն բաժանվում է b-ի, համառոտ գրառում են՝ $a \vdots b$: Նշենք այդ առնչության հիմնական հատկությունները.

1) Ցանկացած a բնական թվի դեպքում $a \vdots a$:

2) Ցանկացած a բնական թվի դեպքում $a \vdots 1$:

3) Եթե $a \vdots b$, $b \vdots c$, ապա $a \vdots c$:

4) Եթե $a \vdots b$ և $c \vdots b$, ապա $(a+c) \vdots b$, $(a-c) \vdots b$:

5) Եթե $a \vdots b$ և $c \in N$, ապա $(a \cdot c) \vdots b$:

6) Եթե $a \vdots b$ և $c \vdots d$, ապա $ac \vdots bd$:

Ցանկացած բնական a թվի համար ընդունվում է, որ $0 \vdots a$:

Ձևակերպենք մնացորդով բաժանման սահմանումը.

a բնական թիվը բաժանել b բնական թվի վրա, նշանակում է՝ գտնել այնպիսի q և r ամբողջ թվեր, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝

$$a = bq + r, \ \ 0 \le r < b$$

Այստեղ q-ն կոչվում է **քանորդ**, իսկ r-ը՝ **մնացորդ**:

Կարելի է ապացուցել, որ ցանկացած a և b բնական թվերի համար իրագործելի է մնացորդով բաժանումը, ընդ որում՝ միակ ձևով:

Ցանկացած բնական թիվ տրված n բնական թվի բաժանելիս ստացված մնացորդը

$$0; 1; 2; ....; n-1$$

թվերից մեկն է: Այդ նշանակում է, որ յուրաքանչյուր բնական թիվ կարելի է ներկայացնել

$$nq, \ nq+1, \ nq+2, \ \ldots, \ nq+(n-1)$$

տեսքերից մեկով, որտեղ $q \in Z_0$: Օրինակ, յուրաքանչյուր բնական թիվ կարելի է ներկայացնել $3q$, $3q+1$, $3q+2$ տեսքերից մեկով:

Համանմանորեն, յուրաքանչյուր բնական թիվ կարելի է ներկայացնել $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ ($k \in Z_0$) տեսքերից մեկով:

Ընդունված է $2k$ ($k \in Z_0$) տեսքի թվերն անվանել զույգ, իսկ $2k-1$ ($k \in Z_0$) տեսքի թվերը՝ **կենտ:** Զույգ և կենտ թվերի միավորումը ոչբացասական ամբողջ թվերի բազմությունն է:

2. Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ

Դիցուք, a-ն և b-ն բնական թվեր են: Այդ թվերի **ընդհանուր բաժանարար** կոչվում է այն բնական թիվը, որի վրա միաժամանակ բաժանվում են a և b թվերը:

a և b թվերի ընդհանուր բաժանարարներից ամենամեծն անվանում են a և b թվերի **ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար** և նշանակում են՝ (a ; b):

Եթե $(a;b)=1$, ապա ասում են, որ a և b բնական թվերը **փոխադարձաբար պարզ** են:

Համանմանորեն, կարելի է ներմուծել երեք և ավելի բնական թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի հասկացությունը:

Երկու բնական թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար հարմար է օգտվել, այսպես կոչված, **Էվկլիդեսի ալգորիթմից,** որի հիմքում ընկած է հետևյալ պնդումը՝

Եթե a թիվը b-ի բաժանելիս ստացվում է r մնացորդ, ապա

$$(a;b)=(b;r):$$

Դիցուք, տրված են a և b բնական թվերը: Եթե a-ն բաժանվում է b-ի (առանց մնացորդի), ապա ակնհայտ է, որ $(a;b)=b$: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ a-ն b-ի բաժանելիս ստացվում է զրոյից տարբեր r մնացորդ: b-ն բաժանենք r-ի և r_1-ով նշանակենք այդ բաժանումից ստացված մնացորդը և այդպես շարունակ՝ յուրաքանչյուր անգամ նախորդ բաժանարարը բաժանելով ստացված մնացորդի վրա: Այդ պրոցեսը շարունակվում է այնքան, քանի դեռ չի ստացվել զրո մնացորդ: Վերջին՝ զրոյից տարբեր մնացորդն էլ հենց կլինի a և b թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

a և b բնական թվերից յուրաքանչյուրի վրա բաժանվող բնական թիվն անվանում են a և b թվերի **ընդհանուր բազմապատիկ**: Այդպիսի թվերից ամենափոքրը կոչվում է a և b թվերի **ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ** և նշանակվում է՝ $[a;b]$: Համանմանորեն սահմանվում է նաև երեք և ավելի բնական թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի հասկացությունը: Ճիշտ է հետևյալ պնդումը՝

$$[a;b]=\frac{ab}{(a;b)}:$$

Ապացուցենք այն: Նշանակենք՝ $(a;b)=d$, $[a;b]=k$:

Քանի որ d -ն a և b թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է, ուստի

$$a=da_1,\ \ b=db_1,$$

որտեղ d, a_1, b_1 թվերը զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են: Ակնհայտ է, որ a և b թվերի յուրաքանչյուր ընդհանուր բազմապատիկ պետք է բաժանվի և՛ d-ի, և՛ a_1 -ի, և՛ b_1 -ի: Այդպիսի թվերից ամենափոքրը $a_1b_1\ d$ -ն է: Նշանակում է՝

$$k=a_1b_1d=\frac{(a_1d)\cdot(b_1d)}{d}=\frac{a\cdot b}{d}:$$

Այսպիսով,

$$[a;b]=\frac{a\cdot b}{(a;b)}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Խնդիրներ լուծելիս հաճախ են կիրառվում հետևյալ թեորեմները.

1) Երկու փոխադարձաբար պարզ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է դրանց արտադրյալին: Այլ կերպ ասած, եթե $(a;b)=1$, ապա $[a;b]=a\cdot b$:

2) Եթե a -ն և b -ն փոխադարձաբար պարզ թվեր են, ապա a -ի և b -ի բաժանվող յուրաքանչյուր բնական թիվ բաժանվում է նաև ab -ի:

3) Եթե a և b թվերը փոխադարձաբար պարզ են և ac ($c\in N$) արտադրյալը բաժանվում է b -ի, ապա c -ն բաժանվում է b -ի:

Դիտողություն: Այսուհետ բնական թվի բաժանարար ասելով ամենուրեք հասկացվում է, որ այն բնական թիվ է:

3. Պարզ և բաղադրյալ թվեր

Բնական p թիվը կոչվում է **պարզ**, եթե այն ունի ճիշտ երկու բաժանարար (1-ը և p -ն):

Երեք և ավելի բաժանարար ունեցող բնական թվերը կոչվում են **բաղադրյալ:**

1 թիվը ո՛չ պարզ է և ո՛չ էլ՝ բաղադրյալ (այն ունի միայն մեկ բաժանարար): 2-ից տարբեր բոլոր պարզ թվերը կենտ են: Բնական հարց է ծագում. պարզ թվերի քանակը վերջավո՞ր է, թե՞ անվերջ:

Թեորեմ: Պարզ թվերի քանակն անվերջ է:

Այս թեորեմն ապացուցել է հին հունական երկրաչափ Էվկլիդեսը: Այն անվանում են «Էվկլիդեսի թեորեմը պարզ թվերի վերաբերյալ»:

Թեորեմն ապացուցենք հակասող ենթադրության եղանակով: Ենթադրենք, թե պարզ թվերի քանակը վերջավոր է և դրանք են՝

$$p_1, p_2, \ldots, p_n :$$

Դիտարկենք

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \tag{1}$$

թիվը: Ակնհայտ է, որ q -ն մեծ է $p_1, p_2, \ldots, p_n$ թվերից յուրաքանչյուրից և դրա համար էլ չի կարող լինել պարզ թիվ (ենթադրության համաձայն $p_1, p_2, \ldots, p_n$ թվերից բացի այլ պարզ թիվ չկա): Նշանակում է՝ q-ն բաղադրյալ թիվ է և ունի գոնե մեկ պարզ բաժանարար: (1) հավասարությունից երևում է, որ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ թվերից ոչ մեկը q -ի բաժանարար չէ: Սակայն յուրաքանչյուր բաղադրյալ թիվ ունի առնվազն մեկ պարզ բաժանարար: Ստացվում է հակասություն, որով էլ հաստատվում է, որ պարզ թվերի վերջավոր լինելու ենթադրությունը ճիշտ չէ: Նշանակում է՝ պարզ թվերի քանակը, իրոք, անվերջ է:

Խնդիրներ լուծելիս օգտակար կլինեն հետևյալ պնդումները.

1) **Եթե p -ն պարզ թիվ է, ապա ցանկացած n բնական թիվ կա՛մ բաժանվում է p -ի, կա՛մ փոխադարձաբար պարզ է p -ի հետ:**
2) **Երկու բնական թվերի արտադրյալը կբաժանվի p պարզ թվի այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ թվերից գոնե մեկը բաժանվում է p -ի:**

3) Յուրաքանչյուր $n \neq 1$ **բնական թիվ կա՛մ պարզ է, կա՛մ պարզ թվերի արտադրյալ է:**

4) (Թվաբանության հիմնական թեորեմը)**1-ից մեծ յուրաքանչյուր բնական թիվ կարելի է ներկայացնել պարզ թվերի արտադրյալի տեսքով, ընդ որում՝ միակ ձևով:**

Այստեղ արտադրյալները համարվում են նույնը, եթե նրանք տարբերվում են միայն արտադրիչների կարգով:

Թվաբանության հիմնական թեորեմն ունի մի շարք կարևոր հետևանքներ: Թվարկենք դրանցից երեքը.

ա) Բնական թվի՝ 1-ից տարբեր ամենափոքր ընդհանուր բաժանարարը պարզ թիվ է:

բ) 1-ից բացի յուրաքանչյուր բնական թիվ ունի առնվազն մեկ պարզ բաժանարար:

գ) Բաղադրյալ n թվի՝ 1-ից տարբեր ամենափոքր ընդհանուր բաժանարարը (այսինքն՝ ամենափոքր պարզ բաժանարարը) չի գերազանցում $\sqrt{n}$ -ը:

Վերջին երեք պնդումներից օգտվում են հատկապես այն դեպքում, երբ ստուգվում է որևէ n բնական թվի պարզ կամ բաղադրյալ լինելը, ընդ որում՝ պարզ բաժանարարները փնտրվում է ոչ թե n -ը չգերազանցող բոլոր պարզ թվելի մեջ, այլ՝ $\sqrt{n}$ -ը չգերազանցող պարզ թվերի մեջ:

Թվաբանության հիմնական թեորեմից հետևում է, որ **ցանկացած** $n \neq 1$ **բնական թիվ կարելի է ներկայացնել** $p_1\ p_2\ \ldots\ p_m$ **տեսքով, որտեղ** p_1, p_2, ..., p_m **-թվերը պարզ են:**

Նման դեպքում ասում են, որ n թիվը **վերածվել է պարզ բազմապատկիչների արտադրյալի:** Քանի որ բազմապատկիչները կարող են կրկնվել, ուստի հարմար է այն ներկայացնել

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$$

տեսքով, որտեղ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ -ն իրարից տարբեր պարզ թվեր են, իսկ ցուցիչները բնական թվեր: Ընդունված է վերջին գրելաձևն անվանել n **թվի կանոնական վերլուծություն:**

Բնական թվերի կանոնական վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս հեշտությամբ լուծել նրանց հետ կապված շատ հարցեր (օրինակ, երկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կամ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելը):

Ընդունված է n թվի բոլոր բնական բաժանարարների քանակը նշանակել $\tau(n)$-ով: Կարելի է ապացուցել, որ

$$\tau(n)=(1+m_1)\cdot(1+m_2)\cdot\ldots\cdot(1+m_k):$$

4. Բաժանելիության հայտանիշները

Երբեմն անհրաժեշտություն է առաջանում առանց բաժանման գործողություն կատարելու բացահայտել, թե տասնորդական գրառմամբ ներկայացված թիվը բաժանվու՞մ է արդյոք տրված b բնական թվի վրա: Ստորև ձևակերպված պնդումները (հայտանիշները) հնարավորություն կտան մասնակիորեն պատասխանել այդ հարցին:

$m=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_o}$ գծիկը ցույց է տալիս, որ դա արտադրյալ չէ, այլ թվի տասնորդական գրելաձև) թիվը երբեմն հարմար է ներկայացնել

$$10^n\cdot a_n+10^{n-1}\cdot a_{n-1}+\ldots+10\cdot a_1+a_0$$

գումարի տեսքով (օրինակ, $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{abc}=100a+10b+c$, 2548=2 · 1000+5 · 100+4 · 10+8 և այլն):

1) **Բնական m թիվը բաժանվում է 2-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա տասնորդական գրառումը վերջանում է 0, 2, 4, 6, 8 թվանշաններից մեկով** (այսինքն՝ **վերջին նիշն արտահայտող թիվը զույգ է):**

2) **Բնական m թիվը բաժանվում է 5-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ դրա տասնորդական գրառումը վերջանում է 0 կամ 5 թվանշանով:**

3) **Որպեսզի բնական թիվը բաժանվի 4-ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն կա՛մ վերջանա 00; 04; 08**-ով, **կա՛մ էլ 4-ի վրա բաժանվի վերջին երկու թվանշաններով կազմված երկնիշ թիվը:**

4) $m=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ **թիվը բաժանվում է 3-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ 3-ի վրա է բաժանվում** $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ **գումարը (թվանշաններն արտահայտող թվերի գումարը):**

5) $m=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ թիվը բաժանվում է 9-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ 9-ի վրա է բաժանվում $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ գումարը (թվանշաններն արտահայտող թվերի գումարը):

6) Եթե բնական թվի տասնորդական գրառման մեջ զույգ տեղերում գտնվող բոլոր թվանշանների գումարի և կենտ տեղերում գրված բոլոր թվանշանների գումարի տարբերության մոդուլը բաժանվում է 11-ի, ապա այդ թիվը ևս կբաժանվի 11-ի: Հակառակ դեպքում տրված թիվը 11-ի բազմապատիկ չէ:

Ա Ռ Ա Ջ Ա Դ Ր Ա Ն Ք Ն Ե Ր

1. Առաջին հարյուր բնական թվերի մեջ.
ա) քանի՞ կենտ թիվ կա,
բ) 3-ի բազմապատիկ քանի՞ թիվ կա:

2. 1-ից մինչև 60 ամբողջ թվերի մեջ քանի՞ պարզ թիվ կա:

3. Ընդամենը քանի՞ երկնիշ թիվ կա: Քանի՞ եռանիշ թիվ կա:

4. Քանի՞ ամբողջ թիվ կա.
ա) սկսած 10-ից մինչև 100-ը,
բ) սկսած k բնական թվից մինչև m բնական թիվը $(k < m)$:

5. Քանի՞ ամբողջ թիվ կա՝ սկսած –10-ից մինչև 10-ը:

6. Սկսած $-n$ -ից մինչև n քանի՞ ամբողջ թիվ կա (n -ը բնական թիվ է):

7. Ինչի՞ է հավասար –100-ից մինչև 103 բոլոր ամբողջ թվերի գումարը:

8. Ինչի՞ է հավասար –2-ից մինչև 5 բոլոր ամբողջ թվերի արտադրյալը:

9. Ինչի՞ է հավասար 1-ից մինչև 99 բոլոր կենտ թվերի գումարը:

10. Գտնել արտահայտության արժեքը.
ա) 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + … + 99 - 100,
բ) 999 – 997 + 995 – 993 + … + 7 – 5 + 3 – 1:

11. Հինգ ամբողջ թվերի արտադրյալը հավասար է 2425: Հնարավո՞ր է, որ այդ թվերի գումարը հավասար լինի 0-ի:

12. Յոթ ամբողջ թվերի արտադրյալը հավասար է 400-ի: Հնարավո՞ր է, որ այդ թվերի գումարը հավասար լինի 40-ի:

13. Հնարավո՞ր է ընտրել 12 բնական թվեր (ոչ անպայման իրարից տարբեր), որոնց գումարը և արտադրյալը լինեն հավասար:

14. 100 թիվը երկու եղանակով ներկայացնել միմյանց հաջորդող մի քանի բնական թվերի գումարի տեսքով:

15. 1000-ը ներկայացնել միմյանց հաջորդող 16 ամբողջ թվերի գումարի տեսքով:

16. Միևնույն տողում գրված են 1-ից մինչև 70 ամբողջ թվերը: Այդ տողում քանի՞ հատ 5 թվանշան է գրված:

17. Հնարավո՞ր է 1-ից մինչև 18 բնական թվերը տրոհել. ա) երկու, բ) երեք խմբի այնպես, որ նրանցում եղած թվերի գումարները լինեն միմյանց հավասար:

18. Հնարավո՞ր է ընտրել չորս հաջորդական ամբողջ թվեր, որոնց գումարը բաժանվի 4-ի:

19. 100 և 90 թվերը բաժանեցին միևնույն թվի վրա և ստացան, համապատասխանաբար, 4 և 18 մնացորդները: Ո՞ր թվի վրա են բաժանել:

20. Ես մտապահեցի մի թիվ, նրան ավելացրեցի 5, ստացված թիվը բաժանեցի 5-ի, արդյունքից հանեցի 5 և այն, ինչ ստացվեց, բազմապատկեցի 5-ով: Ստացա 55: Ի՞նչ թիվ էի մտապահել:

21. Գտնեք այն ամենափոքր բնական թիվը, որը 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 թվերից յուրաքանչյուրի վրա բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ:

22. Ո՞րն այն ամենափոքր թիվը, որը 2-ի, 3-ի, 4-ի, 5-ի, 6-ի բաժանելիս տալիս է, համապատասխանաբար, 1, 2, 3, 4, 5 մնացորդներ, իսկ 7-ի բաժանվում է առանց մնացորդի:

23. Եռանիշ թիվը 13-ի բաժանելիս տալիս է 11 մնացորդ, 11-ի բաժանելիս՝ 9 մնացորդ, իսկ 7-ի բաժանելիս՝ 5 մնացորդ: Գտեք այդ թիվը:

24. Ընտրեք այն ամենափոքր քառանիշ թիվը, որը 1-ից տարբեր ցանկացած միանիշ թվի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ:

25. Հայրը ցանկանում է 36 խնձորը բաժանել իր հինգ երեխաների միջև: Խնձորների կեսը նա տալիս է որդիներին, որոնք միմյանց միջև այն բաժանում են հավասարապես, իսկ մյուս կեսը տալիս է դուստրերին, որոնք նույնպես բաժանում են հավասարապես:

Վերջում պարզվեց, որ յուրաքանչյուր դուստրը ստացել է 3 խնձոր ավելի, քան յուրաքանչյուր որդին: Քանի՞ որդի և քանի՞ դուստր ունի հայրը:

26. Գտեք երկու այնպիսի պարզ թվեր, որոնց տարբերությունը և գումարը նույնպես պարզ թվեր են:

27. Ապացուցեք, որ ցանկացած բնական n թվի դեպքում $5^n + 5^{n+3}$ թիվը բաժանվում է 126-ի:

28. Ապացուցեք, որ $3^{100} - 21^{21}$ թիվը 10-ի բազմապատիկ է:

29. Ապացուցեք, որ երեք միատեսակ թվանշաններով գրված եռանիշ թիվը բաժանվում է 37-ի:

30. Եռանիշ թիվը կողք-կողքի գրված է երկու անգամ: Ապացուցեք, որ ստացված վեցանիշ թիվը բաժանվում է և՛ 13-ի, և՛ 11-ի, և՛ 7-ի:

31. 1-ից մինչև 12 բոլոր բնական թվերը գրված են կողք-կողքի (աճման կարգով): Ապացուցեք, որ ստացված բազմանիշ թիվը բաժանվում է 12-ի:

32. Բնական թիվը 2-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, իսկ 3-ի բաժանելիս՝ 2 մնացորդ: Ի՞նչ մնացորդ կստացվի՝ այդ թիվը 6-ի բաժանելիս:

33. Գտնել բոլոր այն բնական թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը 8-ի բաժանելիս քանորդում ստացվում է նույն թիվը, ինչ՝ մնացորդում:

34. Գտնել այն ամենափոքր բնական թիվը, որը կարելի է ներկայացնել ինչպես հինգ, այնպես էլ ութ հաջորդական բնական թվերի գումարի տեսքով:

35. Բերեք քառանիշ թվի օրինակ, որն ունենա ճիշտ հինգ բնական բաժանարար: Քանի՞ այդպիսի քառանիշ թիվ կա:

36. Գտեք 111 ... 11 (100 հատ 1-երով) թիվը 9-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

37. Ապացուցեք, որ ցանկացած բնական n թվի համար կարելի է ընտրել այնպիսի բնական x թիվ, որ $(nx+1)$-ը լինի բաղադրյալ:

38. Ապացուցեք, որ ցանկացած եռանիշ թվի և այդ թվի թվանշաններն արտահայտող թվերի գումարը բաժանվում է 9-ի:

39. Ապացուցեք, որ.

ա) $\overline{abba}$ թիվը բաժանվում է 11-ի,

բ) $\overline{aaabbb}$ թիվը բաժանվում է 34-ի,

գ) $\overline{ababab}$ թիվը բաժանվում է 7-ի,

դ) $\overline{abab}-\overline{baba}$ թիվը բաժանվում է 909-ի:

40. Միայն պարզ թվերն ունեն ճիշտ երկու բաժանարար՝ 1-ը և այդ թիվը: Իսկ ո՞ր թվերն ունեն ճիշտ երեք բաժանարար: Նշել այդպիսի բոլոր թվերը:

41. Ապացուցեք, որ ցանկացած $k>1$ բնական թվի դեպքում k^4+4 թիվը բաղադրյալ է:

42. Երկնիշ թվին գումարել են նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված թիվը. ստացել են ամբողջ թվի քառակուսի: Գտեք այդ հատկությամբ օժտված բոլոր երկնիշ թվերը:

43. Եթե երկնիշ թվի թվանշանների միջև գրվի այդ նույն երկնիշ թիվը, ապա ստացված քառանիշ թիվը 77 անգամ մեծ կլինի սկզբնական թվից: Գտնել այդ երկնիշ թիվը:

44. Բնական թվի մեջ տեղափոխեցին թվանշանները և ստացան սկզբնականից 3 անգամ մեծ թիվ: Ապացուցեք, որ ստացված թիվը բաժանվում է 27-ի:

45. Եթե մի որոշ երկնիշ թվի թվանշանների միջև գրվի 0, ապա ստացված եռանիշ թիվը 9 անգամ մեծ կլինի սկզբնականից: Գտեք այդ երկնիշ թիվը:

46. Երբ երկնիշ թվի ձախից կցագրեցին 6 թվանշանը, այն մեծացավ 13 անգամ: Գտեք այդ երկնիշ թիվը:

47. Ապացուցեք, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ այնպիսի բնական թվեր, որոնց քառակուսիները վերջանում են 444-ով:

48. Աշակերտը գրատախտակի վրա գրեց երկու երկնիշ թվերի բազմապատկման որևէ օրինակ: Այնուհետև նա ջնջեց բոլոր թվանշանները և դրանք փոխարինեց տառերով, ընդ որում, միևնույն թվանշանները միևնույն տառերով, տարբերները՝ տարբերներով: Ստացվեց այսպիսի հավասարություն՝

$$\overline{cd} \cdot \overline{ab} = \overline{effe}:$$

Ապացուցեք, որ այդ աշակերտը սխալվել է:

49. Ի՞նչ թվով պետք է բազմապատկել 123 456 789 թիվը, որպեսզի ստացված թվի բոլոր թվանշանները լինեն 5-եր:

50. Պա՞րզ է, թե՞ բաղադրյալ 1 234 567 891 011 թիվը:

51. Բնական թվի տասնորդական գրառումը պարունակում է միայն 10-ական 1 և 5 թվանշաններ: Ապացուցեք, որ այդպիսի թվերի մեջ չկա բնական թվի քառակուսի:

52. Հնարավո՞ր է ընտրել այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում $5n+3$ թիվը լինի ամբողջ թվի քառակուսի:

53. Ո՞ր բնական k թվերի դեպքում $k^2+7k+18$ թիվը կլինի ամբողջ թվի քառակուսի:

54. Գտնել այն ամենափոքր բնական թիվը, որը մեծանում է 2 անգամ՝ նրա վերջին թվանշանը առաջին տեղը տեղափոխելիս:

55. 3, 5, 7 թվերը միմյանց հաջորդող կենտ և միաժամանակ պարզ թվեր են: Հնարավո՞ր է բնական թվերի շարքում ընտրել այդ պայմաններին բավարարող երկրորդ եռյակը:

56. Հետևյալ 2017 թվերի մեջ 7-ի բազմապատիկ քանի՞ թիվ կա.

1, 11, 111, 1111, 11111, …, 111…111:

57. Ապացուցեք, որ

$$2^5+2^{10}+2^{15}+2^{20}+2^{25}+2^{30}$$

թիվը բաժանվում է 1056-ի

58. Ապացուցեք, որ լրիվ քառակուսի հանդիսացող բնական թվի թվանշանների գումարը չի կարող կարող լինել 50:

59. ա) Ապացուցեք, որ գոյություն ունեն անվերջ շատ այնպիսի բնական n թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում $4n+3$ թիվը 23-ի բազմապատիկ է:

բ) Ապացուցեք, որ եթե որևէ բնական n-ի դեպքում $(4n+3)$-ը բաժանվում է 23-ի, ապա նույն n-ի դեպքում $(13n+4)$-ը ևս բաժանվում է 23-ի: Ճի՞շտ է արդյոք հակադարձ պնդումը:

60. Հնարավո՞ր է 1, 2, 3, ..., 11, 12 թվերը դասավորել 3 տողից և 4 սյունյակից կազմված աղյուսակում այնպես, որ չորս սյունյակներից յուրաքանչյուրում եղած թվերի գումարը լինի միևնույնը:

61. Հնարավո՞ր է 1, 2, 3, ..., 11, 12 թվերը դասավորել 3 տողից և 4 սյունյակից կազմված աղյուսակում այնպես, որ երեք տողերից յուրաքանչյուրում եղած թվերի գումարը լինի միևնույնը:

62. Խանութում վաճառվում են ներկեր, որոնք տեսակավորված են տարաներում՝ 3 կգ-ով և 5 կգ-ով: Ապացուցեք, որ այդ խանութում գնորդը կարող է գնել 7-ից մեծ ցանկացած ամբողջ թվով արտահայտված կիլոգրամ ներկ:

63. Տան ջրագիծն անցկացնելու համար անհրաժեշտ է 167 մետր խողովակ: Ձեռքի տակ կան միայն 5 մ և 7 մ երկարությամբ խողովակներ: Յուրաքանչյուր տեսակից քանի՞ խողովակ է հարկավոր վերցնել, որպեսզի ջրագիծն անցկացնելիս միացումների քանակը լինի նվազագույնը:

64. Տրված են 17 հատ կենտ թվեր: Հնարավո՞ր է այդ թվերը տրոհել երկու այնպիսի խմբերի, որ նրանցից մեկում եղած թվերի գումարը հավասար լինի մյուսում գտնվող թվերի գումարին:

65. Հնարավո՞ր է բնական թվերի հաջորդականությունից առաջին 100 պարզ թվերը տրոհել երկու այնպիսի խմբերի, որ նրանցից մեկում եղած թվերի գումարը հավասար լինի մյուսում գտնվող թվերի գումարին:

66. 1-ից մինչև 1000 ամբողջ թվերը գրված են շրջանագծի երկայնքով: Նշելով առաջինը, այնուհետև հաջորդաբար նշում ենք յուրաքանչյուր 15-րդ թիվը՝ այսինքն՝ 1, 16, 31, 46, …: Այդ պրոցեսը շարունակվում է այնքան, քանի դեռ՝ կատարելով մի քանի պտույտ, չենք վերադարձել 1 թվին: Չնշված քանի՞ թիվ կմնա:

67. Վահանն ուներ թղթի 10 թերթ: Նրանցից մի քանիսը նա կտրատեց 4-ական մասերի: Այնուհետև, ստացված կտորներից մի քանիսը ևս կտրատեց 4-ական մասերի: Այդ գործընթացը մի քանի անգամ կատարելուց հետո, ըստ Վահանի հաշվարկի, ստացվել էր 365 կտոր: Ճի՞շտ էր, արդյոք, Վահանի հաշվարկը:

68. 25! թվից հանեցին իր թվանշանների գումարը: Ստացված թվից ևս հանեցին իր թվանշանների գումարը: Այնուհետև ստացված թվից նորից հանեցին իր թվանշանների գումարը և այդ պրոցեսը շարունակեցին այնքան, որ ստացվեց միանիշ թիվ: Ի՞նչ թիվ էր դա:

Ծանոթություն: $n!$ (էն ֆակտորիալ) նշանակվում է 1-ից մինչև n բնական թվերի արտադրյալը (օրինակ, $37! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 36 \cdot 37$):

69. Հնարավո՞ր է 1, 2, 3, ... , 49, 50 թվերը տրոհել երկու խմբի այնպես, որ մի խմբում եղած թվերի գումարը հավասար լինի մյուսում եղած թվերի գումարին:

70. Հնարավո՞ր է ընտրել միմյանց հաջորդող 1000 բնական թվեր այնպես, որ նրանք բոլորը լինեն բաղադրյալ:

71. Քանի՞ զրոյով է վերջանում 2017! թիվը (1-ից մինչև 2017 ամբողջ թվերի արտադրյալը):

72. Ապացուցեք, որ ոչ մի բնական n թվի դեպքում $5n-3$ թիվը չի կարող լինել լրիվ քառակուսի (ամբողջ թվի քառակուսի):

73. Ի՞նչ մնացորդ կստացվի, եթե 2^{2000} թիվը բաժանենք.

ա) 7- ի, բ) 1024-ի, գ) 15-ի, դ) 17-ի:

74. 400 թվին աջից կցագրել այնպիսի քառանիշ թիվ, որ ստացված յոթանիշ թիվը լինի բնական թվի քառակուսի: Գտնել այդպիսի բոլոր քառանիշ թվերը:

75. Ապացուցեք, որ գոյություն չունեն այնպիսի բնական n, k, m թվեր, որ $n^{20}+k^{20}+m^{20}$ գումարի տասնորդական գրառումը վերջանա 9 թվանշանով:

76. Քանի՞ զրոյով կարող են վերջանալ 9^n+1 տեսքի թվերը, որտեղ n -ը բնական թիվ է:

77. Գոյություն ունի՞ այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում 2^n-23 թիվը լինի որևէ բնական թվի քառակուսի:

78. Ամբողջ թվի գրառման մեջ մասնակցում են 1, 2, 3, 4, 5 թվանշանները՝ մեկական անգամ, իսկ մնացած թվանշանները 0-ներ են: Ապացուցեք, որ այդպիսի թվերից և ոչ մեկը չի կարող լինել ամբողջ թվի քառակուսի:

79. Ապացուցեք, որ գոյություն չունի այնպիսի բնական n թիվ, որ 21-ի բաժանելիս տա 17 մնացորդ, իսկ 35-ի բաժանելիս՝ 23 մնացորդ:

80. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի բնական x թիվ, որ $nx+25$ թիվը լինի լրիվ քառակուսի:

Ամբողջ թվերի քանի՞ $(x;\ y)$ թվազույգ է բավարարում տրված հավասարությանը: Նշել այդ թվազույգերը (81, 82).

81. $x^2-y^2=2017$:

82. $x^2+y^2=2017$

83. Ապացուցել, որ եթե որոշ m և n բնական թվերի դեպքում $3m+7n$ թիվը բաժանվում է 19-ի, ապա m-ի և n-ի նույն արժեքների դեպքում $4m+3n$ թիվը ևս բաժանվում է 19-ի:

84. Ապացուցել, որ եթե որոշ m, n, k բնական արժեքների դեպքում $3m+4n+5k$ թիվը 11-ի բազմապատիկ է, ապա նույն արժեքների դեպքում $9m+n+4k$ թիվը նույնպես բաժանվում է 11-ի:

85. Գտնել բոլոր P պարզ թվերը, որոնց դեպքում $P+20$ և $P+28$ թվերը նույնպես պարզ են:

86. Ինչպիսի՞ p պարզ թվերի դեպքում $2p+1$ և $4p+1$ թվերը նույնպես կլինեն պարզ:

87. Ինչպիսի՞ p պարզ թվերի դեպքում

$$p+8\ ,\ 2p+3\ ,\ 4p+3\ ,\ 5p+4\ ,\ 6p+1$$

թվերից յուրաքանչյուրը կլինի պարզ:

88. Ապացուցել, որ եթե n-ը երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումար է, ապա $2n$-ը նույնպես կարելի է ներկայացնել երկու ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարի տեսքով:

89. Եռանիշ թիվը 5 անգամ մեծ է իր թվանշանների արտադրյալից: Ո՞րն է այդ թիվը:

90. Հնարավո՞ր է 9999 թվին աջից կցագրել ևս չորս թվանշան այնպես, որ ստացված ութանիշ թիվը լինի լրիվ քառակուսի:

91. P-ն պարզ թիվ է: Գտնել բոլոր այն թվերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրը փոխադարձաբար պարզ է p^2 թվի հետ և փոքր է այդ թվից:

92. Ապացուցել, որ պարզ թվերի քանակն անվերջ է:

93*. Ապացուցել, որ եթե a, b, c բնական թվերի գումարը բաժանվում է 6-ի, ապա այդ թվերի խորանարդների գումարը ևս բաժանվում է 6-ի:

Ապացուցել, որ գոյություն չունեն այնպիսի ամբողջ թվեր, որոնց դեպքում ճիշտ լինի տրված հավասարությունը (94-97).

94. $12m - 21n = 203$: **95.** $m^2 - n^2 = 2^{50} + 50$:

96. $m^2 + n^2 = 3^{30} + 30$: **97.** $m^2 + 4m = n^2 + 1002$:

Գտնել բնական թվերով բոլոր $(x;\ y)$ թվազույգերը, որոնց դեպքում հավասարությունը ճիշտ է (98-100).

98. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 95$: **99.** $x^2 - 7x + 1 = 6^{y-5}$:

100. $x! + 57 = y^2$:

§ 2. ԲԱՂԴԱՏՈՒՄՆԵՐ: ՖԵՐՄԱՅԻ ՓՈՔՐ ԹԵՈՐԵՄԸ

Համառոտ տեղեկություն

Ամբողջ թվերի բաժանելիության շատ հարցեր քննարկելիս երբեմն օգտակար են դառնում այն հատկությունները, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշ արտահայտություններ (ամբողջ թվեր) փոխարինել նրանց՝ այս կամ այն բնական թվի բաժանելիս ստացված մնացորդներով, այնուհետև գործողություններն իրականացնել մնացորդների հետ: Պատահական չէ, որ մաթեմատիկայի պատմության ընթացքում, ամբողջ թվերի տեսության մեջ, առաջացել է մի բաժին, որը կոչվում է **մնացորդների թվաբանություն:** Այդ տեսության հիմնադիրը գերմանացի մաթեմատիկոս Ֆրիդրիխ Գաուսն է (18-րդ դարի վերջ, 19-րդ դարի սկիզբ): Համառոտ նկարագրենք այն գաղափարները, որոնք ընկած են «Մնացորդների թվաբանության» հիմքում:

Յուրաքանչյուր բնական թիվ տրված m բնական թվի բաժանելիս ստացված մնացորդը

$$0;\ 1;\ \ 2;\ \ldots;\ m-2;\ m-1$$

թվերից մեկն է (հնարավոր մնացորդների քանակը m է):

Այս նկատառումով, ոչբացասական ամբողջ թվերի բազմությունը տրոհվում է m խմբի (դասի).

$$mk;\ \ mk+1;\ \ mk+2;\ldots;\ \ mk+m-1$$

ընդհանուր տեսքերով, որտեղ k-ն ցանկացած ոչբացասական ամբողջ թիվ է:

Եթե a և b բնական թվերը m-ի բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը, այսինքն՝ պատկանում են միևնույն դասին, ապա ասում են, որ այդ թվերը **բաղդատելի են ըստ մոդուլ** m-ի և գրառում են՝

$$a \equiv b(\operatorname{mod} m):$$

Կարդացվում է այսպես. «a-ն բաղդատելի է b-ի հետ ըստ մոդուլ m-ի»:

Որպես օրինակ վերցնենք m=6: Ոչբացասական ամբողջ թվերի բազմությունը տրոհվում է վեց դասերի՝ ըստ մոդուլ 6-ի.

$$6k;\ \ 6k+1;\ \ 6k+2;\ \ 6k+3;\ \ 6k+4;\ \ 6k+5 \quad \left(k \in Z_0\right)$$

Օրինակ, 26-ը և 74-ը $6k+2$ տեսքի են, ուստի այդ թվերը պատկանում են միևնույն դասի և բաղդատելի են ըստ մոդուլ 6-ի՝

$$74 \equiv 26 (\bmod 6):$$

$6 \cdot 5^{20}+4$ և 10 թվերը պատկանում են $6k+4$ տեսքի թվերի բազմությանը, ուստի՝

$$6 \cdot 5^{20}+4 \equiv 10 (\bmod 6):$$

Ձևակերպենք բաղդատումների վերաբերյալ հիմնական հատկությունները, որոնց ապացուցումները դժվարություն չեն ներկայացնում (կատարեք ինքնուրույն).

1) a և b թվերը բաղդատելի են ըստ մոդուլ m-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a-b$ տարբերությունը բաժանվում է m-ի:

2) Ցանկացած a ամբողջ թվի և m բնական թվի համար

$$a \equiv a (\bmod m):$$

3) Եթե $a \equiv b (\bmod m)$, ապա $b \equiv a (\bmod m)$:

4) Եթե $a \equiv b (\bmod m)$ և $b \equiv c (\bmod m)$, ապա $a \equiv c (\bmod m)$:

5) Եթե $a \equiv b (\bmod m)$ և $c \equiv d (\bmod m)$, ապա.

ա) $a+c \equiv b+d (\bmod m)$, բ) $a-c \equiv b-d (\bmod m)$,

գ) $ac \equiv bd (\bmod m)$, դ) $a^k \equiv b^k (\bmod m)$, $k \in N$:

6) Եթե $a \equiv b (\bmod m)$, ապա ցանկացած c ամբողջ թվի համար.

ա) $a+c \equiv b+c (\bmod m)$, բ) $ac \equiv bc (\bmod m)$:

7) Եթե $a \equiv b (\bmod m)$ և d-ն a և b թվերի ընդհանուր բաժանարար է, ընդ որում d-ն և m-ը փոխադարձաբար պարզ են, ապա

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} (\bmod m):$$

Բերենք օրինակներ:

Օրինակ 1. Գտնել 2^{102} -ը 17-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

Լուծում. Ակնհայտ է, որ

$$2^4 \equiv -1 (\bmod 17):$$

Երկու մասերը բարձրացնենք 25 աստիճան (տե՛ս հատկություն 5, դ).

$$2^{100} \equiv 1 (\bmod 17):$$

Այժմ, ստացված բաղդատման երկու մասերը բազմապատկենք 2^2-ով (տե՛ս հատկություն 6, բ).

$$2^{102} \equiv 4 (\bmod 17):$$

Վերջին առնչությունը ցույց է տալիս, որ 2^{102}-4 տարբերությունը բաժանվում է 17-ի: Նշանակում է՝ 2^{102}-ը 17-ի բաժանելիս ստացվում է 4 մնացորդ:

Օրինակ 2. Գտնել 2^{341} -ը 341-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

Լուծում. Օգտվենք հետևյալ ակնհայտ բաղդատումից՝

$$2^{10} \equiv 1 (\bmod 1023):$$

Քանի որ 2^{10}-1=1023=3·341, ուստի $(2^{10}-1)\vdots 341$, նշանակում է՝

$$2^{10} \equiv 1 (\bmod 341):$$

Ստացված բաղդատման երկու մասերը բարձրացնելով 34 աստիճան, կստանանք՝

$$2^{340} \equiv 1 (\bmod 341):$$

Մնում է վերջին բաղդատման երկու մասերը բազմապատկել 2-ով: Ստանում ենք՝

$$2^{341} \equiv 2 (\bmod 341):$$

Վերջին առնչությունից էլ հետևում է, որ որոնելի մնացորդը 2-ն է:

Օրինակ 3. Ապացուցել, որ $2^{32}+1$ թիվը բաժանվում է 641-ի:

Լուծում. Նկատենք, որ 641=640+1=5·2^7+1:

Նշանակում է՝ $5 \cdot 2^7 \equiv -1 (\bmod 641):$

Այս բաղդատման երկու մասերը բարձրացնելով 4 աստիճան, կստանանք՝

$$5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 (\bmod 641)$$

Այնուհետև նկատենք, որ $5^4 = 625 = 641-16$:

Հաշվի առնելով այդ՝ (1)-ը կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$641 \cdot 2^{28} - 2^{32} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 641):$$

Ստացվում է, որ

$$(641 \cdot 2^{28} - 2^{32}) - 1$$

թիվը բաժանվում է 641-ի, որից էլ հետևում է, որ

$$(2^{32} + 1) \vdots 641:$$

Այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

Օրինակ 4. Ապացուցել, որ a և b բնական թվերի համար, որտեղ $a > b$, ինչպիսի բնական n թիվ էլ լինի

$$(a^n - b^n) \vdots (a - b):$$

Լուծում. Ակնհայտ է, որ

$$a \equiv b (\mathrm{mod}(a - b):$$

Երկու մասերը բարձրացնելով n աստիճան, կստանանք՝

$$a^n \equiv b^n (\mathrm{mod}(a - b)):$$

Իսկ դա նշանակում է, որ

$$(a^n - b^n) \vdots (a - b):$$

Օրինակ, ցանկացած n բնական թվի դեպքում՝

$$(13^n - 4^n) \vdots 9, \ (27^n - 1) \vdots 26, \ (37^n - 29^n) \vdots 8:$$

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

Օգտվելով բաղդատումներից ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում պնդումը ճիշտ է (1-8).

1. $(8^n - 1) \vdots 7$:

2. $(11^n - 7^n) \vdots 4$:

3. $(5^{2n} - 2^{2n}) \vdots 21$:

4. $(53^n - 15^n) \vdots 19$:

5. $(27^{2n-1} + 13^{2n-1}) \vdots 40$:

6. $(2^{4n+2} + 3^{4n+2}) \vdots 13$:

7. $(2^{6n+3} + 3^{6n+3}) \vdots 35$:

8. $(9 \cdot 81^n + 13 \cdot 169^n) \vdots 22$:

Ի՞նչ մնացորդ կստացվի a թիվը b-ի բաժանելիս (9-16).

9. $a = 2^{24}$, $b = 7$:

10. $a = 2^{40}$, $b = 9$:

11. $a = 3^{30}$, $b = 28$:

12. $a = 33^{44}$, $b = 10$:

13. $a = 7^{39}$, $b = 50$:

14. $a = 5^{29}$, $b = 28$:

15. $a = 6^{51}$, $b = 217$:

16. $a = 22^{34}$, $b = 13$:

Ապացուցել պնդումը (17-28).

17. $(8^{23} + 15^{23}) \vdots 23$:

18. $(9^{26} - 5^{26}) \vdots 56$:

19. $(3^{28} + 4^{21}) \vdots 145$:

20. $(4^{34} + 7^{34}) \vdots 65$:

21. $(20^{21} + 1) \vdots 8001$:

22. $(2^{36} + 3^{36}) \vdots 97$:

23. $(333^{444} + 444^{333}) \vdots 7$:

24. $(10^9 - 7) \vdots 17$:

25. $(10^{16} - 1) \vdots 51$:

26. $(11^{20} - 1) \vdots 200$:

27. $(2^{341} - 2) \vdots 341$:

28. $(2^{41} + 1) \vdots 83$:

29. Ապացուցել, որ ցանկացած m բնական թվի դեպքում

$$\frac{10^{16m} - 1}{3}$$

թիվն ամբողջ է և բաժանվում է 17-ի:

30. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում
$$18^n - n^{16}$$
թիվը 17-ի բազմապատիկ է:

31. Գտնել 333^{333} թվի վերջին թվանշանը:

32. Գտնել 51^{51}-ը 100-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

33. Գտնել 2^{999} թվի վերջին երկու թվանշաններով արտահայտված երկնիշ թիվը:

34. Գտնել 2^{66} թվի վերջին երեք թվանշաններով արտահայտված եռանիշ թիվը:

35. Գտնել 5^{92}-ը 1222-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

* * *

Թվերի տեսության մեջ առանձնահատուկ տեղ ունի մեծ կիրառություններ ունեցող հետևյալ թեորեմը՝

Եթե p-ն պարզ թիվ է, ապա ցանկացած a բնական թվի դեպքում $a^p - a$ թիվը բաժանվում է p-ի:

Այս թեորեմն առաջինը ձևակերպել է ֆրանսիացի իրավաբան, մաթեմատիկայի մեծ սիրահար Պյեռ Ֆերման[1] (1601-1665): Այն ստացել է <<**Ֆերմայի փոքր թեորեմը**>> անվանումը:

Ապացուցում: Ամենից առաջ նկատենք, որ եթե a բնական թիվը փոխադարձաբար պարզ է p պարզ թվի հետ, այսինքն՝ a-ն չի բաժանվում p-ի, ապա a թիվը p-ի բաժանելիս մնացորդում կստացվի
$$1, 2, 3, \ldots, p-1$$
թվերից որևէ մեկը:

---

[1] *Թեև Ֆերման մասնագիտությամբ իրավաբան էր, սակայն, իր տաղանդի շնորհիվ, նա գիտակ էր բազմաթիվ ոլորտների: Առանձնահատուկ հակումներ է ունեցել դեպի մաթեմատիկական գիտությունը և իր ժամանակի մեծ մասը տրամադրել է մաթեմատիկային: Հենց այդ բնագավառում էլ հասել է մեծ հաջողությունների, ստացել է բազմաթիվ նոր արդյունքներ, որոնցով էլ հանրահայտ է դարձել մաթեմատիկայի պատմության մեջ:*

Դիտարկենք

$$1\cdot a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$$

թվերը: Այդ թվերը p-ի բաժանելիս կստացվեն 0-ից տարբեր բոլոր հնարավոր մնացորդները $(1, 2, \ldots, p-1)$: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ նրանցից ոչ մի երկուսը p-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել միևնույն մնացորդը:

Իրոք, հակառակ դեպքում՝ եթե նրանցից որևէ երկուսը, ասենք, ka և $ma(m>k)$ թվերը p-ի բաժանելիս ստացվի նույն մնացորդը, ապա $ma-ka\equiv(m-k)a$ թիվը կբաժանվի p-ի: Քանի որ a-ն և p-ն փոխադարձաբար պարզ են, ուստի $m-k$ թիվը պետք է բաժանվի p-ի, որը հնարավոր չէ $(m-k<p)$: Ստացված հակասությունը հաստատում է վերը նշված պնդումը:

Դիցուք, (1) հաջորդականության $(p-1)$ թվերը p-ի բաժանելիս ստացվում են, համապատասխանաբար, $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{p-1}$ մնացորդները (այդ թվերը 1, 2, 3, … $p-1$ թվերն են՝ այլ դասավորությամբ): Նշանակում է՝

$$1\cdot a\equiv l_1 \pmod p,$$

$$2\cdot a\equiv l_2 \pmod p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(p-1)a\equiv l_{p-1} \pmod p:$$

Բազմապատկելով ստացված $(p-1)$ բաղդատումները, կստանանք՝

$$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)a^{p-1}\equiv l_1\, l_2\ldots l_{p-1} \pmod p:$$

Քանի որ $l_1 l_2 \ldots l_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)$ և $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)$ թիվը փոխադարձաբար պարզ է p-ի հետ, ուստի (2) առնչությունից կունենանք՝

$$a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p):$$

Իսկ դա նշանակում է, որ

$$\left(a^{p-1} - 1\right) \vdots p:$$

Ակնհայտ է, որ եթե a -ն կամայական բնական թիվ է, ապա

$$a\left(a^{p-1} - 1\right) \vdots p, \text{ այսինքն՝ } \left(a^p - a\right) \vdots p:$$

«Ֆերմայի փոքր թեորեմն» ապացուցված է:

Քանի որ $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$, ապա a -ի և p -ի փոխադարձ պարզ լինելու պայմանով Ֆերմայի փոքր թեորեմից հետևում է, որ $(a^{p-1} - 1) \vdots p$:

Ստորև բերված խնդիրները լուծել Ֆերմայի փոքր թեորեմի կիրառմամբ:

36. Ապացուցել, որ $(23^{40} - 1) \vdots 41$:

37. Ապացուցել, որ $(9^{37} - 9) \vdots 37$:

38. Ապացուցել, որ $(4^{31} - 4) \vdots 124$:

39. Ապացուցել, որ $(4^{36} - 1) \vdots 323$:

40. Ապացուցել, որ $8^{22} - 1$ թիվը բաժանվում է և՛ 7-ի, և՛ 9-ի, և՛ 23-ի:

41. Ապացուցել, որ $7^{61} - 1$ թիվը 61-ի բազմապատիկ է:

42. Ապացուցել, որ $3^{2016} - 1$ թիվը 2017-ի բազմապատիկ է:

43. Բաժանվու՞մ է արդյոք $2^{1093} - 2$ թիվը 1093-ի:

44. Բաժանվու՞մ է արդյոք $14^{100} + 99$ թիվը 101-ի:

45. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում

$$2^{4n+2} + 7^{4n+2} + 7^{52n} - 1$$

թիվը բաժանվում է 53-ի:

46*. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում

$$9^{11n}+2^{5n}-3^{2n}-1$$

թիվը բաղադրյալ է:

47*. Ապացուցել, որ ցանկացած p պարզ թվի համար գոյություն ունեն անվերջ շատ բնական n թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում 2^n-n թիվը բաժանվում է p -ի:

48*. a,b,c -ն բնական թվերն այնպիսին են, որ $a+b+c=2017$:
Ի՞նչ մնացորդ կարող է ստացվել $a^{17}+b^{17}+c^{17}$ արտահայտությունը 17-ի բաժանելիս:

§ 3. ՀԱՏԸՆՏՐԱՆՔ ԵՎ ՄԻԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԱՐՐԵՐ

Համառոտ տեղեկություն

Դեռևս ցածր դասարաններում մաթեմատիկայի շատ խնդիրներ լուծելիս սովորողները առնչվում են տվյալ խնդրի պայմաններին հավակնող վերջավոր թվով հնարավոր դեպքերից տվյալ պայմաններին բավարարող օբյեկտների ընտրության հետ:

Օգտվելով խնդրի լուծման ընտրության (հատընտրանքի) եղանակից սովորողը, ըստ էության, փորձարկում և համատեղում է դիտարկված փաստերը ու ստացված արդյունքներից ընտրում է լուծումը: Այդպիսի դիտարկումների ընթացքում հարստանում է նրա գործնական փորձը: Հենց դրանում է կայանում խնդրի լուծման հատընտրանքի եղանակի իմացական արժեքը: «Հատընտրանք» բառը գործածվում է այն իմաստով, որ վերջավոր թվով հնարավոր ելքերից հատ-հատ ընտրություն է կատարվում:

Հատընտրանքի եղանակով խնդիրներ լուծելիս հարկավոր է դիտարկել բոլոր հնարավոր դեպքերը և նրանցից առանձնացնել այն օբյեկտները, որոնք բավարարում են խնդրի պայմաններին, միաժամանակ ցույց տալով, որ այլ լուծումներ չեն կարող լինել: Այդպիսի խնդիրներ լուծելիս սովորողը պետք է լիովին համոզվածություն ունենա այն բանում, որ դիտարկված են հնարավոր բոլոր դեպքերը: Դրանում էլ կայանում է նմանատիպ առաջադրանքների առանձնահատկությունն ու դժվարությունը սովորողների համար:

Պատահական չէ, որ հատընտրանքի մեթոդը «իրավունք» է նվաճել՝ տեղ գտնելով դպրոցական դասագրքերում, մաթեմատիկական մրցույթներում և այլն: Հատընտրանքի մեթոդով են ապացուցվում մաթեմատիկական տրամաբանության որոշ թեորեմներ: Քիչ չէ նաև այդ մեթոդի գործնական նշանակությունը:

Գործնականում հաճախ հարկ է լինում վերջավոր թվով օբյեկտներից (տարրերից) այս կամ այն կանոնի համաձայն կազմել զանազան կոմբինացիաներ (միացություններ, համակցություններ), ինչպես նաև հաշվել բոլոր հնարավոր կոմբինացիաների քանակը: Այդպիսի խնդիրներն ստացել են **միացությունների (կոմբինատորական)** խնդիրներ անվանումը:

Մաթեմատիկայի այն բաժինը, որն զբաղվում է նման խնդիրների լուծմամբ, կոչվում է **միացությունների տեսություն** (կոմբինատորիկա):

Սույն պարագրաֆում բերված միացություններին վերաբերող խնդիրները լուծելու համար չի պահանջվում այդ տեսության թեորեմների կամ բանաձևերի իմացություն: Այդպիսի խնդիրներ լուծելիս պարզապես պետք է ցուցադրել բնական տրամաբանություն և սթափ մտածողություն:

ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔՆԵՐ

1. Միևնույն տողում, կողք-կողքի գրում են միմյանց հաջորդող չորս հաջորդական թվանշաններ, այնուհետև առաջին երկու թվանշանների տեղերը փոխում են: Ստացված քառանիշ թիվը բնական թվի քառակուսի է: Գտեք այդ թիվը:

2. Ուսանողն ուսումնառության հինգ տարիների ընթացքում հանձնեց 31 քննություն: Յուրաքանչյուր հաջորդ տարում նա հանձնոց ավելի շատ քննություն, քան նախորդ տարում: Հինգերորդ կուրսում քննությունները երեք անգամ ավելի էին, քան առաջին կուրսում: Քանի՞ քննություն կար չորրորդ կուրսում:

3. Մրցութային 40 խնդիր կազմելու համար մասնակցեցին հինգ կուրսերի 30 ուսանող: Համակուրսեցի ցանկացած երկու ուսանող կազմեցին միևնույն քանակով խնդիրներ: Տարբեր կուրսերի ցանկացած երկու ուսանող կազմեցին տարբեր քանակով խնդիրներ: Քանի՞ ուսանող կազմեցին մեկական խնդիր:

4. Գտնել բոլոր այն քառանիշ թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը 400-ի աջից կցագրելուց ստացված յոթանիշ թիվը լրիվ քառակուսի է:

5. Ճի՞շտ է, արդյոք, հետևյալ պնդումը՝ եթե p-ն 100-ից մեծ և 200-ից փոքր պարզ թիվ է, ապա $210-p$ թիվը նույնպես պարզ թիվ է:

6. Գոյություն ունի՞ այնպիսի բնական n թիվ, որի դեպքում 9^n+1 թիվը բաժանվի 100-ի:

7. Գտնել ամբողջ թվերի բոլոր $(m;n)$ թվազույգերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$m^2+n^2=50:$$

8. Գտնել ոչ բացասական ամբողջ թվերի բոլոր $(x;y)$ թվազույգերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրը բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը՝

$$x^2+y^2\le 13:$$

9. Գոյություն ունե՞ն այնպիսի x և y ամբողջ թվեր, որոնց դեպքում ճիշտ է

$$x^2+y^2=200$$

հավասարությունը: Եթե այո, գտնել այդպիսի բոլոր $(x;y)$ թվազույգերի քանակը:

10. Գտնել բոլոր այն բնական n թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում

$$n^2+5n+61$$

արտահայտության արժեքը ամբողջ թվի քառակուսի է:

11. Գտնել ամբողջ թվերով բոլոր այն $(x;y)$ թվազույգերի քանակը,որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը

$$|x|+|y|\le 3:$$

12. Հարթությունը քանի՞ մասի կարող է տրոհվել չորս ուղիղներով: Դիտարկել բոլոր դեպքերը և յուրաքանչյուր դեպքում կատարել գծագիր:

13. 8-րդ դասարանում կա 24 աշակերտ: Նրանք բոլորը զույգ առ զույգ փոխանակեցին իրենց լուսանկարները: Ընդամենը քանի՞ լուսանկար փոխանակվեց:

14. Ֆուտբոլային խաղերի առաջնության ընթացքում կայացել է 91 հանդիպում: Յուրաքանչյուր թիմ մյուսներից յուրաքանչյուրի հետ հանդիպել է մեկ անգամ: Քանի՞ թիմ էր մասնակցում առաջնությանը:

15. Զուգահեռ ուղիղներից մեկի վրա նշված են 4 կետ, իսկ մյուսի վրա՝ 3 կետ: Քանի՞ քառանկյուն գոյություն ունի, որոնցից յուրաքանչյուրի գագաթները նշված կետերից են:

16. Զուգահեռ ուղիղներից մեկի վրա նշված են 3 կետ, իսկ մյուսի վրա՝ 5 կետ: Քանի՞ եռանկյուն գոյություն ունի, որոնցից յուրաքանչյուրի գագաթները նշված կետերից են:

17. Քանի՞ եղանակով կարելի է 4 մարդու նստեցնել կլոր սեղանի շուրջ, եթե այնտեղ դրված են 4 աթոռ:

18. Գտնել բոլոր այն քառանիշ թվերի գումարը, որոնք կազմված են $2, 4, 6, 8$ թվանշաններից (թվանշանները չեն կրկնվում):

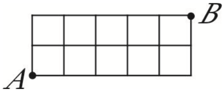
19. Հերթապահությանը պետք է ուղարկել 2 մարդ, մեկը՝ երեք ենթասպաներից, մյուսը՝ 6 զինվորներից: Քանի՞ տարբեր եղանակներով կարելի է այն իրագործել:

20. Չորս աշակերտներին անհրաժեշտ է տեղաբաշխել երեք զուգահեռ դասարաններում: Քանի՞ եղանակով կարելի է այն իրագործել:

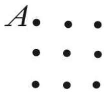
21. Քանի՞ եղանակով կարելի է սեղանի շուրջ դրված 8 աթոռների նստեցնել 4 տղայի և 4 աղջկա այնպես, որ յուրաքանչյուր տղա գտնվի երկու աղջիկների միջև:

22. Քանի՞ հնգանիշ թիվ կա, որոնցից յուրաքանչյուրը գրառվում է միայն. ա) $1, 2, 3, 4$, բ) $0, 1, 2, 3$ թվանշաններով (յուրաքանչյուր թվանշան կարող է հանդես գալ մի քանի անգամ):

23. Վթարի հետևանքով A խաչմերուկում ջարդվեց ավտոմեքենայի լուսապակին: Վարորդին անհրաժեշտ է ամենակարճ ճանապարհով հասնել նորոգման B արհեստանոցը: Քանի՞ եղանակով նա կարող է ընտրել երթուղին:



24. Ինը կետեր դասավորված են այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկարում: Քանի՞ եռանկյունի կարելի է կառուցել այնպես, որ մի գագաթը լինի A կետը, իսկ մյուսը երկուսը՝ նշված մյուս կետերից:



25. Քանի՞ անկյունագիծ ունի այն ուռուցիկ բազմանկյունը, որն ունի. ա) 5 կողմ, բ) 8 կողմ, գ) $n(n \geq 4)$ կողմ:

26. Քանի՞ հնգանիշ թիվ կարելի է կազմել 0,1,2,3,4 թվանշաններով (թվի գրության մեջ թվանշանները չպետք է կրկնվեն):

27. 1,2,3,4,5 թվանշաններից կազմված են բոլոր հնարավոր հնգանիշ թվերը՝ առանց թվանշանների կրկնության: Դրանցից քանի՞սն են, որ. ա) սկսվում են 45-ով, բ) սկսվում են 3 թվանշանով, գ) չեն սկսվում 12 -ով:

28. Հարթության վրա նշված կետերից ոչ մի երեքը չեն գտնվում միևնույն ուղղի վրա: Յուրաքանչյուր երկու կետով տարվում է ուղիղ: Ընդամենը քանի՞ ուղիղ կառաջանա, եթե նշված կետերի քանակն է. ա) 4, բ) 10, գ) $n(n \geq 2)$:

29*. Հարթության վրա նշված են 9 կետ, որոնցից ոչ մի երեքը չեն պատկանում միևնույն ուղղի և ոչ մի չորսը՝ միևնույն շրջանագծի: Քանի՞ շրջանագիծ գոյություն ունի, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է նշված կետերից երեքը:

30*. Ապացուցել, որ բոլոր այն իննանիշ թվերի գումարը, որոնց գրառման մեջ մասնակցում են 1-ից մինչև 9 թվանշանները (յուրաքանչյուրը ճիշտ մեկ անգամ), բաժանվում է 999 999 999-ի:

31*. Բեռնաթափման աշխատանքների համար ջոկի 10 զինվորներից պետք է ընտրեն 8-ին: Քանի՞ ձևով կարելի է այն իրականացնել:

§ 3. ՏԵՔՍՏԱՅԻՆ ՀԵՏԱՔՐՔՐԱՇԱՐԺ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Ֆերմայում կան ճագարներ և հավեր, որոնք միասին ունեն 1000 գլուխ և 3150 ոտք: Քանի՞ ճագար և քանի՞ հավ կա ֆերմայում:

2. Ֆուտբոլային առաջնությանը մասնակցելու է 20 թիմ: Յուրաքանչյուր թիմ մյուսների հետ պետք է հանդիպի մեկական անգամ: Քանի՞ հանդիպում է լինելու այդ առաջնությունում:

3. Շախմատային առաջնությունում խաղացվեց 45 խաղ: Որոշեք առաջնության մասնակիցների թիվը, եթե հայտնի է, որ ամեն մի մասնակից մյուսների հետ անցկացրեց մեկական խաղ:

4. ***(Հին խնդիր):*** Այն հարցին, թե քանի աշակերտ ունի ինքը, Պյութագորասը պատասխանեց. «Իմ աշակերտների կեսն ուսումնասիրում է մաթեմատիկա, քառորդ մասը՝ բնություն, ութերորդ մասն ամբողջ ժամանակ լռությամբ է մտածում, մնացած երեքը ամբաններ են»: Քանի՞ աշակերտ ուներ Պյութագորասը:

5. Այժմ հայրը երեք անգամ մեծ է որդուց: Երբ որդին 6 տարեկան էր, հայրը 30 տարեկան էր: Այժմ քանի՞ տարեկան է նրանցից յուրաքանչյուրը:

6. Քանի՞ տարեկան է եղբայրը և քանի տարեկան է քույրը, եթե 2 տարի առաջ եղբայրը քրոջից մեծ էր երկու անգամ, իսկ 8 տարի առաջ՝ հինգ անգամ:

7. Ավագ եղբայրն ասում է կրտսեր եղբորը. «Երբ ես այնքան տարեկան էի, որքան դու այժմ, ես երեք անգամ մեծ էի քեզանից, իսկ երբ դու կլինես այնքան տարեկան, որքան այժմ ես եմ, ապա մենք միասին կլինենք 60 տարեկան»: Քանի՞ տարեկան են եղբայրները:

8. ***(Կատակ - խնդիր):*** Տնտեսուհուն հարցրին.

- Որքա՞ն ձու են տալիս ձեր հավերը:

- Հաշվեք ինքներդ,- եղավ պատասխանը,- մեկուկես հավը մեկուկես օրում ածում է մեկուկես ձու, իսկ ես ունեմ 24 հավ: Քանի՞ ձու են ածում տնտեսուհու հավերը մեկ օրում:

9. Առաջին տնտեսուհու 8 հավերը 8 օրում ածում են 30 ձու, իսկ երկրորդ տնտեսուհու 10 հավերը 10 օրում ածում են 46 ձու: Ո՞ր տնտեսուհու հավերն են շահեկան:

10. Արկղը լցված էր խնձորներով: Սկզբում արկղից վերցրեցին բոլոր խնձորների կեսը և էլի կես խնձոր, այնուհետև մնացածի կեսը և էլի կես խնձոր, և, վերջապես, նոր մնացորդի կեսը և էլի կես խնձոր: Դրանից հետո արկղում մնաց 31 խնձոր: Սկզբում քանի՞ խնձոր կար արկղում:

11. Գյուղացին շուկայում ձու էր վաճառում: Առաջին գնորդին նա վաճառեց ամբողջի կեսը և էլի 1 ձու: Երկրորդ գնորդը վերցրեց մնացածի կեսը և էլի մեկ ձու, երրորդը գնեց մանացածի կեսը և էլի մեկ ձու: Զամբյուղում մնաց 10 ձու: Քանի՞ ձու էր գուղացին բերել շուկա:

12. Երեք տղաներ ունեն որոշ քանակով խնձոր: Նրանցից առաջինը մյուսներին տալիս է այնքան խնձոր, որքան ունեին նրանցից յուրաքանչյուրը: Այնուհետև երկրորդը մյուսներին տալիս է այնքան խնձոր, որքան խնձոր նրանցից յուրաքանչյուրն արդեն ուներ, իր հերթին, երրորդը մյուսներին տալիս է այնքան խնձոր, որքան յուրաքանչյուրն ուներ այդ պահին: Դրանից հետո տղաներից յուրաքանչյուրի մոտ եղավ 8 խնձոր: Սկզբում քանի՞ խնձոր ուներ նրանցից յուրաքանչյուրը:

13. Վաճառողուհին առաջին օրը վաճառեց խանութում եղած ամբողջ կտորեղենի կեսը և նորից $\frac{1}{2}$ մետր: Երկրորդ օրը նա վաճառեց մնացածի մեկ երրորդը և նորից $\frac{1}{3}$ մետր: Երրորդ օրը նա վաճառեց մնացորդի մեկ քառորդը և նորից $\frac{1}{4}$ մետր: Դրանից հետո խանութում մնաց 8 մետր կտոր: Ընդհամենը քանի՞ մետր վաճառվեց այդ երեք օրում:

14*. Երեք անոթներ լցված են ջրով: Եթե առաջին անոթի ջրի $\frac{1}{3}$ մասը լցնեն երկրորդ անոթի մեջ, այնուհետև երկրորդում ստացված ջրի $\frac{1}{4}$ մասը լցնեն երրորդի մեջ և, վերջապես, երրորդում եղած ջրի $\frac{1}{10}$ մասը լցնեն առաջինի մեջ, ապա յուրաքանչյուր անոթում կստացվի 9 լ ջուր: Քանի՞ լիտր ջուր կար յուրաքանչյուր անոթում:

15*. Երեք ընկերներ իրենց կապիկի հետ գիշերեցին անտառում: Նրանք իրենց հետ էին վերցրել ընկույզով լցված տոպրակ: Գիշերը նրանցից մեկը զարթնեց և ցանկացավ վերցնել իր բաժին ընկույզները: Նա ամբողջ ընկույզները բաժանեց երեք հավասար մասերի և ավելացած մեկ ընկույզը տվեց կապիկին: Որոշ ժամանակ անց զարթնեց երկրորդ ընկերը և, չկարծելով, որ իր ընկերն արդեն վերցրել է իր բաժինը, մնացած ընկույզներից մեկը տվեց կապիկին և մյուսների $\frac{1}{3}$-ը վերցրեց իրեն ու նորից քնեց: Վերջապես, զարթնեց երրորդ ընկերը. անտեղյակ լինելով մինչ այդ կատարվածից, մեկ ընկույզ տվեց կապիկին և մնացածի $\frac{1}{3}$-ը մասը վերցնելով իրեն՝ նորից քնեց: Առավոտյան, երբ ընկերներն արդեն արթնացել էին, նրանք նկատեցին, որ դեռ որոշ քանակով ընկույզ մնացել է: Ամեն մեկն ասաց, որ ինքը վերցրել է եղած ընկույզի $\frac{1}{3}$ մասը: «Ինչևէ, այդ դեպքում մնացած ընկույզները հավասարապես բաժանենք»,- որոշեցին նրանք: Նրանցից յուրաքանչյուրը ստացավ ևս 7 ընկույզ և մեկ ընկույզ մնաց կապիկին: Ընդհամենը քանի՞ ընկույզ կար սկզբում:

16*. Շախմատային մրցամարտի մասնակիցների թվում կար երկու կին: Մրցամարտի յուրաքանչյուր մասնակից մյուսների հետ խաղաց երկուական խաղ: Տղամարդկանց՝ միմյանց հետ կայացած խաղերի թիվը 66-ով ավելի էր նրանց՝ կանանց հետ անցկացրած խաղերի թվից: Քանի՞ հոգի էին մասնակցում մրցամարտին և ընդամենը քանի՞ խաղ անցկացվեց:

17*. Վոլեյբոլի մրցումներին մասնակցում էր n թիմ: Յուրաքանչյուր թիմ մնացած բոլորի հետ խաղաց մեկական անգամ: Յուրաքանչյուր հաղթանակի համար թիմը ստանում է մեկ միավոր, իսկ պարտության համար՝ ոչ մի: Վոլեյբոլում ոչ-ոքի չկա: Մրցումներն ավարտվելուց հետո պարզվեց, որ թիմերի հավաքած միավորները, սկսած առաջին տեղից, հերթականությամբ հավասարաչափ են նվազում: Քանի՞ միավոր հավաքեց վերջին տեղը գրաված թիմը:

18. Ավազանը լցվում է ջրի երկու ծորակով: Նրանցից մեկով դատարկ ավազանը լցվում է 2,5 ժամում, իսկ մյուսով՝ 3,75 ժամում: Որքա՞ն ժամանակում կլցվի դատարկ ավազանը, եթե միաժամանակ գործի դրվեն այդ երկու ծորակները:

19. Առաջին բրիգադում կա 4 մարդ, որոնք 4 ժամում տեղափոխում են 4 տոննա այյուր: Երկրորդ բրիգադում կա 7 մարդ, որոնք 7 ժամում տեղափոխում են 7 տոննա այյուր: Ո՞ր բրիգադն է ավելի լավ աշխատում:

20. ***(Հին խնդիր):*** Չորս հյուսն ուզում են տուն սարքել: Առաջին հյուսնը, միայնակ աշխատելով, կարող է տունը կառուցել 1 տարում, երկրորդը՝ 2 տարում, երրորդը՝ 3 տարում, չորրորդը՝ 4 տարում: Միասին աշխատելով որքա՞ն ժամանակում նրանք կկառուցեն տունը:

21. Առաջին և երկրորդ բրիգադները կարող են առաջադրանքը կատարել 9 օրում, երկրորդը և երրորդը՝ 18 օրում, առաջինը և երրորդը՝ 12 օրում: Աշխատելով համատեղ, քանի՞ օրում կարող են ավարտել այդ առաջադրանքը երեք բրիգադները միասին:

22. Նախորդ խնդրի պայմաններով որոշել, թե քանի՞ օրում երրորդ բրիգադը կարող է կատարել նույն առաջադրանքը՝ աշխատելով առանձին:

23. Արագընթաց մեքենան ամբողջ ճանապարհի կեսն անցավ 80 կմ/ժ արագությամբ, իսկ երկրորդ կեսը՝ 120 կմ/ժ արագությամբ: Գտեք ավտոմեքենայի միջին արագությունն ամբողջ ուղևորության ընթացքում:

24. Մարդատար ավտոմեքենան երկու քաղաքների միջև եղած հեռավորությունն անցնում է 3 ժամում, իսկ բեռնատար մեքենան՝ 5 ժամում: Մեքենաները միաժամանակ, իրար հանդեպ դուրս են գալիս այդ քաղաքներից: Շարժումն սկսելու պահից որքա՞ն ժամանակ անց մեքենաները կհանդիպեն:

25. Մարդատար գնացքը սյան մոտով անցավ 9 վրկ-ում, իսկ 336 մետր երկարությամբ կամրջի վրայով՝ 23 վրկ-ում: Ի՞նչ երկարություն ունի գնացքը, եթե նրա արագությունը հաստատուն է:

26. ***(Հին խնդիր, Չինաստան, II դ.):*** Վայրի բադը հարավային ծովից մինչև հյուսիսային ծովը թռչում է 7 օրում: Վայրի սագը հյուսիսային ծովից մինչև հարավային ծովը թռչում է 9 օրում: Վայրի բադը և վայրի սագը չվում են միաժամանակ: Քանի՞ օր հետո նրանք կհանդիպեն:

27. ***(Հին խնդիր):*** Որսորդն իր շան հետ գնաց որսի: Նրանք գնում էին անտառով և, հանկարծ, շունը նապաստակ տեսավ: Քանի՞ ցատկ անելով շունը կհասնի նապաստակին, եթե շան և նապաստակի միջև եղած հեռավորությունը հավասար է շան 40 ցատկին, և շան հինգ ցատկը հավասար է նապաստակի վեց ցատկին: (Ընդունեք, որ շունը և նապաստակը ցատկերն անում են միաժամանակ):

28. Հեծանվորդն A -ից B ճանապարհն անցավ հաստատուն արագությամբ: Վերադարձին (B -ից A ճանապարհին) նա ընթացավ երկու անգամ մեծ արագությամբ: Սակայն, անցնելով ճանապարհի կեսը, անձրևի պատճառով ստիպված արագությունը իջեցրեց

4 անգամ և այդպես հասավ A: Ո՞ր ճանապարհին նա ավելի քիչ ժամանակ ծախսեց. A-ից B, թե՞ B-ից A:

29*. Նավակը լճով 6 ժամում անցնում է այնքան ճանապարհ, որքան կանցնի գետի հոսանքի ուղղությամբ 5 ժամում: Որքա՞ն ժամանակ կպահանջվի, որպեսզի լաստն անցնի այդ նույն հեռավորությունը:

30*. Երկու նավահանգիստների միջև եղած հեռավորությունը գետի հոսանքի ուղղությամբ նավակն անցնում է 8 ժամում, իսկ լաստը՝ 72 ժամում: Որքա՞ն ժամանակ կծախսի նավակը՝ այդ նույն հեռավորությունը լճով անցնելու դեպքում:

31*. A և B կետերի հեռավորությունը շարժիչավոր նավակը գետի հոսանքի ուղղությամբ անցնում է 2 ժամում, իսկ լաստը՝ 8 ժամում: Որքա՞ն ժամանակ կծախսի նավակը՝ B-ից A գնալիս:

32*. Շոգենավը գետի հոսանքի ուղղությամբ A վայրից B վայրը հասնում է 6 ժամում, իսկ B-ից A վերադառնում է 7 ժամում: Որքա՞ն ժամանակում լաստը կլողա A-ից B:

33*. Հայր և որդի նավարկում էին գետի հոսանքին հակառակ ուղղությամբ: Ինչ որ պահին, որդու անզգույշ շարժումներից, նավակից ջուրն էր ընկել հոր գլխարկը: Միայն 15 րոպե հետո, երբ հայրը նկատեց, որ գլխարկը չկա, անմիջապես նավակը հետ շրջեց և շարժվեց հոսանքի ուղղությամբ (պահպանելով նավակի սեփական արագությունը): Քանի րոպե հետո նրանք կհասնեն գլխարկին:

34*. Նավակը և լաստը միաժամանակ շարժվեցին նավահանգստից: Հոսանքին հակառակ 2 ժամ լողալուց հետո նավակը հետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Շրջվելու պահից ո՞րքան ժամանակ անց նավակը կհանդիպի լաստին:

35*. Նավակը և լաստը միաժամանակ շարժվեցին նավահանգստից: Երբ լաստը գտնվում էր նավահանգստից 3 կմ հեռավորության վրա, նավակը հետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավահանգստից ի՞նչ հեռավորության վրա նավակը կհանդիպի լաստին:

36*. Երկու եղբայրներ ունեին մարզադաշտի տոմս: Մարզադաշտը գտնվում էր նրանց տնից 10 կմ հեռավորության վրա: Սկզբում նրանք մտադրվել էին մարզադաշտ հասնել ոտքով, բայց փոխեցին իրենց մտադրությունը և որոշեցին օգտվել հեծանվից, պայմանավորվելով, որ մեկը կմեկնի հեծանվով, իսկ մյուսը նրա հետ միաժամանակ՝ ոտքով: Անցնելով ճանապարհի որոշ մասը, առաջինը կթողնի հեծանիվը, իսկ երկրորդը, հասնելով հեծանվին, իր ճանապարհը կշարունակի հեծանվով և առաջինին կհասնի մարզադաշտի մուտքի մոտ: Որքա՞ն ժամանակ կշահեն եղբայրները սկզբնական մտադրության համեմատությամբ, երբ որոշել էին ամբողջ ճանապարհը գնալ ոտքով, եթե նրանցից յուրաքանչյուրը 1 կմ-ը հեծանվով անցնում է 12 րոպեով ավելի շուտ, քան՝ ոտքով:

37. Քաղաքն այժմ ունի 48 400 բնակիչ: Հայտնի է, որ բնակչությունն ամեն տարի ավելացել է 10%-ով: Քանի՞ բնակիչ ուներ քաղաքը երկու տարի առաջ:

38. Քաղաքի բնակչությունը տարեկան ավելանում է 10 %-ով: Այժմ քաղաքն ունի 1 000 000 բնակիչ: Քանի՞ բնակիչ կունենա այդ քաղաքը երեք տարի հետո:

39. Ապրանքի գինը երկու անգամ բարձրացրին նույն տոկոսով: Արդյունքում նրա գինը բարձրացավ 69 %-ով: Քանի՞ տոկոսով բարձրացրին ապրանքի գինն ամեն անգամ:

40*. Նոր հնձած կանաչ անասնակերի խոնավությունը կազմում է 60 %, իսկ որոշ ժամանակ անց նրանից ստացված խոտի խոնավությունը դառնում է 20 %: Մեկ տոննա թարմ կանաչից քանի՞ կգ խոտ կստացվի:

41*. Հավաքեցին 100 կգ սունկ, որի խոնավությունը կազմում է 99 %: Չորացնելուց հետո այդ սնկի խոնավությունը իջավ մինչև 98 %: Քանի՞ կիլոգրամ սունկ մնաց չորանալուց հետո:

42*. Թարմ խնձորը պարունակում է 70 % ջուր: Որոշ ժամանակ անց խնձորը կորցրեց կշռի 60 %-ը: Այդ պահին խնձորը քանի՞ տոկոս ջուր էր պարունակում:

43*. Թարմ միրգը պարունակում է 72 % ջուր, իսկ չորացած միրգը՝ 20 % ջուր: Որքա՞ն չոր միրգ կստացվի 40 կգ թարմ մրգից:

44*. Մինչև չորանալը խոտի խոնավությունը կազմում էր 23 %, իսկ չորանալուց հետո խոնավությունը դարձավ 12 %: Քանի՞ տոկոսով պակասեց խոտի զանգվածը չորանալիս:

45*. Պղնձի հանքաքարը պարունակում է 40 % պղինձ, ձուլվածքը՝ 96 %: Որքա՞ն ձուլվածք կստացվի 120 տ հանքաքարից:

46*. Պղնձի հանքաքարը պարունակում է 30 % պղինձ, իսկ ձուլվածքը՝ 93 %: Քանի՞ տոննա հանքաքարից կստացվի 50 տոննա ձուլվածք:

47*. 44 կգ թարմ սնկից ստացվում է 5 կգ չորացրած սունկ: Թարմ սնկի ո՞ր տոկոսն է ջուրը, եթե չորացած սնկի 12 %-ն է ջուրը:

48*. Թարմ միրգը պարունակում է 98 % ջուր: 200 կգ թարմ միրգը տեղափոխեցին պահեստ և որոշ ժամանակ անց մրգի մեջ ջրի պարունակությունը նվազեց և դարձավ 96 %: Որքա՞ն էր մրգի նոր զանգվածը:

49*. Նոր արդյունահանած քարածուխը պարունակում է 2 % ջուր, իսկ երկու շաբաթ բաց օդում մնալուց հետո այն պարունակում է 12 % ջուր: Քանի՞ կգ-ով է ավելանում արդյունահանած քարածխի 1,1 տոննան, եթե բաց օդում այն մնում է երկու շաբաթ:

50*. Անտառատնտեսության աշխատակազմը որոշեց հատել սոճիների անտառը: Իմանալով այդ մասին, բնապահպանները դեմ դուրս եկան այդ որոշմանը: Տնտեսության ղեկավարն այսպես բացատրեց. «Մեր անտառում սոճիները կազմում են ամբողջ անտառի 99 %-ը: Հատումից հետո անտառի մնացած սոճիները կկազմեն բոլոր ծառերի 98 %-ը»: Անտառի ո՞ր մասն է նախատեսվում հատել:

§ 4. ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

(1-17 *համարների խնդիրները լուծեք բանավոր և հնարավորինս՝ արագ*)

1. Վառվում էր 10 մոմ: Դրանցից երեքը հանգցրին: Քանի՞սը մնաց:

2. Երկու ընկեր դաշտ գնացին և հավաքեցին 100 սունկ: Ոգևորված ընկերների «ավարով»՝ անմիջապես դաշտ գնացին նաև մյուս 4 ընկերները: Քանի՞ սունկ կբերեն նրանք:

3. Բույսի ցողունի բարձրությունը 1 մետր է: Վաղ առավոտյան, ցողունի հիմքից (գետնից) նրա երկայնքով սկսեց բարձրանալ թրթուրը. ցերեկը բարձրանում էր 4 դմ, իսկ գիշերը իջնում էր 3 դմ և այդպես ամեն օր: Քանի՞ օր հետո թրթուրը կհասնի ցողունի գագաթը:

4. Գերան կտրող մեքենան 10 մետրանոց գերանից 1 մետր երկարությամբ կտորն առանձնացնում է 12 վայրկյանում: Այդ գերանից 5 մետր երկարությամբ կտորն առանձնացնելու համար որքա՞ն ժամանակ կպահանջվի:

5. Առաջին հարկից քանի՞ հարկ պետք է բարձրանալ 7-րդ հարկը հասնելու համար:

6. Վանդակում կա երեք ճագար: Ինչպե՞ս ճագարները բաժանել երեք ընկերների միջև, որ նրանցից յուրաքանչյուրն ստանա մեկ ճագար և և մեկ ճագար էլ մնա վանդակում:

7. Ձիերի եռյակն անցավ 24 կմ: Քանի՞ կմ անցավ յուրաքանչյուր ձին:

8. Տարվա քանի՞ ամիս ունի 28 օր:

9. Իմ ձախ կողմի գրպանում այնքան դրամ էր, որքան՝ աջ գրպանում: Ես ձախ գրպանից 100 դրամանոց մետաղադրամը տեղափոխեցի աջ գրպանս: Դրանից հետո աջ գրպանում քանի՞ դրամ ավելի եղավ, քան ձախ գրպանում:

10. Դա պատահեց ռեստորանում: Սեղաններից մեկի շուրջը նստած էին երկու հայր և երկու որդի: Նրանք ճաշկերույթի ընթացքում կերան 3 խնձոր: Մեկ այլ սեղանի շուրջը նստած էին երեք հայր և երեք որդի, որոնք կերան 4 խնձոր: Ինչպե՞ս կարող է դա պատահել, եթե հայտնի է, որ նրանցից յուրաքանչյուրը կերել է ճիշտ մեկ խնձոր:

11. Մեկ ոտքի վրա կանգնած աքլորը կշռում է 2 կգ: Քանի՞ կգ կկշռի աքլորը, եթե կանգնի երկու ոտքի վրա:

12. Գնորդը հավ գնելու համար վճարեց 1200 դրամ և էլի կես հավի գին: Ի՞նչ արժեր հավը:

13. Արամն ու Գեղամը ապրում են միևնույն շենքի, համապատասխանաբար, 2-րդ և 6-րդ հարկերում: Իրենց հարկերը բարձրանալիս Գեղամը քանի՞ անգամ է ավելի շատ ճանապարհ անցնում, քան Արամը (հաշվվում է առաջին հարկից):

14. Ի՞նչ նշան պետք է դնել 7-ի և 8-ի միջև, որպեսզի արդյունքում ստացված թիվը մեծ լինի 7-ից և փոքր լինի 8-ից:

15. Մոմակալը մոմի հետ արժե 310 դրամ: Մոմակալը մոմից թանկ է 300 դրամով: Ի՞նչ արժե մոմակալը և ի՞նչ արժե մոմը:

16. Պետրոսն ապրում է A գյուղում, բայց աշխատում է B գյուղում: Նա, սովորաբար, աշխատանքի է գնում հեծանիվով: Այդ օրը նա որոշեց շուտ հասնել աշխատանքի, ուստիև գործի չդրեց հեծանիվը: Ուղևորվեց ընկերոջ արագընթաց մեքենայով, որի արագությունը 8 անգամ մեծ էր հեծանվի արագությունից: Սակայն ճանապարհի ուղիղ կեսին այդ մեքենան փչացավ, և Պետրոսը ճանապարհի մնացած մասը հարկադրված գնաց ոտքով: Գնում էր, որքան հնարավոր է, արագ քայլերով՝ հեծանվի արագությունից ընդամենը երկու անգամ փոքր արագությամբ: Պետրոսն այդ օրը արդյո՞ք ավելի քիչ ժամանակ ծախսեց ճանապարհի վրա, քան մնացած օրերին, երբ գնում էր հեծանվով:

17. Երեք ընկեր նախաճաշելու համար գնացին ճաշարան: Նրանք 1000-ական դրամով հավաքած 3000 դրամը տվեցին մատուցողին և պատվիրեցին իրենց նախընտրած ուտեստեղենը: Պատվիրածը մատուցելիս մատուցողը վերադարձրեց ավելացած 500 դրամը: Նրանք այդ 500 դրամից 200 դրամով գնեցին մեկ տուփ կոնֆետ և 100-ական դրամ էլ դրեցին իրենց գրպանը: Այդպիսով նրանցից յուրաքանչյուրը ծախսեց 1000-100=900 դրամ, ուստի և միասին ծախսեցին՝ 3x900=2700 դրամ ճաշի և 200 դրամ կոնֆետի համար, ընդամենը՝ 2700+200=2900 դրամ: Իսկ ո՞ւր «կորավ» 100 դրամը:

* * *

18. (***Հին խնդիր***): Երեք զինվոր և երեք ավազակ պետք է անցնեն գետի մյուս ափը: Նրանք գտան մի նավակ: Նավակով երկու մարդուց ավելի չեն կարող տեղափոխվել: Մյուս կողմից, չի կարելի նույն ափին թողնել ավելի շատ ավազակ, քան՝ զինվոր: Այնուամենայնիվ, նրանց բոլորին հաջողվեց տեղափոխվել մյուս ափը: Ինչպե՞ս դա կատարվեց:

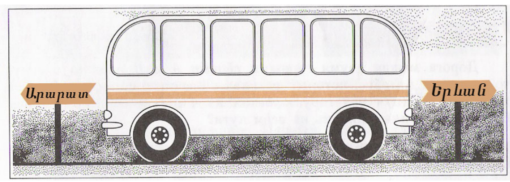
19. Լճում աճում են թրաշուշաններ: Հայտնի է, որ մեկ օր անցնելուց հետո շուշանների թիվը կրկնապատկվում է և արդեն 40-րդ օրվա վերջում լճակն ամբողջովին ծածկված էր շուշաններով: Ասեք, թե ո՞ր օրվա վերջում էր, որ լճակի ուղիղ կեսն էր ծածկված շուշաններով:

20. Ես խմեցի բաժակով լիքը լցված սուրճի կեսը և այն լրացրի կաթով: Հետո խմեցի ստացված խառնուրդի $\frac{1}{3}$ մասը և փոխարենը լցրեցի կաթ: Այնուհետև ես խմեցի բաժակի պարունակության $\frac{1}{6}$ մասը և փոխարենը լցրեցի կաթ: Վերջապես, ես խմեցի ամբողջ բաժակը: Ի՞նչը ես շատ խմեցի՝ սո՞ւրճ, թե՞ կաթ:

21. Ապացուցել, որ Երևան քաղաքի բնակիչներից կարելի է ընտրել 2700 մարդ, որոնք նույն օրն են տոնում իրենց ծննդյան օրը (Երևանն ունի առնվազն մեկ միլիոն բնակիչ):

22. (***Կատակ-խնդիր***) Խանութ մտան երկու տղա: Նրանցից յուրաքանչյուրը փող ուներ և ուզում էր մատիտներ գնել: Սակայն մատիտները վաճառվում էին տուփերով: Ամբողջ տուփը գնելու համար նրանցից մեկին պակասում էր 300 դրամ, իսկ մյուսին՝ 20 դրամ: Նրանք միավորեցին իրենց ունեցած փողերը և որոշեցին միասին գնել մեկ տուփ մատիտ: Բայց պարզվեց, որ այդպես ևս հնարավոր չէ. ընդհանուր գումարը ևս պակասում է: Ի՞նչ արժեր մատիտների տուփը (նրա գինը վերջանում է 0 թվանշանով): Որքա՞ն փող ուներ տղաներից յուրաքանչյուրը:

23. Քննիչ Գասպարյանը նկարի միջոցով ուզում է որոշել, թե ու՞ր էր գնում ավտոբուսը (նկ. 1): Եվ նա ճիշտ որոշեց ավտոբուսի ուղղությունը: Ինչպե՞ս գուշակեց:



Նկ. 1

24. Չորս ընկերներ՝ Արշակը, Գեղամը, Հայկը և Ներսեսը մասնակցեցին դահուկային մրցույթին: Հաջորդ օրը, այն հարցին, թե ով որ տեղն է գրավել, նրանք պատասխանեցին այսպես.

Արշակը - ես ոչ առաջինն էի, ոչ էլ՝ վերջինը:

Գեղամը - ես վերջինը չէի:

Հայկը - ես առաջինն էի:

Ներսեսը - ես վերջին տեղն էի:

Հայտնի է, որ այդ պատասխաններից երեքը ճիշտ են, իսկ մեկը՝ սխալ: Նրանցից ո՞վ ճիշտ չասաց: Ո՞վ էր առաջինը:

25. Հանդեսին Աննան, Հասմիկը, Էլենը և Մարիամը հագել էին տարբեր գույնի շրջազգեստներ (կարմիր, կապույտ, սպիտակ, երկնագույն): Հաջորդ օրը այն հարցին, թե հանդեսին ով ինչ գույնի շրջազգեստ էր հագել, աղջիկներից երեքը պատասխանեցին.

1) Էլենը՝ կապույտ, Մարիամը՝ սպիտակ;

2) Էլենը՝ կարմիր, Մարիամը՝ կապույտ;

3) Աննան՝ կապույտ, Մարիամը՝ երկնագույն:

Յուրաքանչյուր պատասխանի մի մասը ճիշտ է, մյուս մասը՝ սխալ: Աղջիկներից ո՞վ ինչ գույնի շրջազգեստ էր հագել հանդեսին:

26. Դպրոցի տնօրենը զրուցում է չորս աշակերտների հետ, որոնք կասկածի տակ էին առնված՝ դասասենյակի պատուհանի ապակիները ջարդելու գործում:

Արամն ասաց, որ Բաբկենն է ջարդել ապակին:

Բաբկենը պնդում է, որ Դավիթն է մեղավոր:

Դավիթը փորձում է հավատացնել տնօրենին, որ Բաբկենը ստում է:

Վարդանը համառորեն պնդում է, որ ինքը չի ջարդել ապակին: Տնօրենին հաջողվեց հիմնավորել, որ աշակերտներից մեկը չի ստել: Ո՞վ էր գողացել մատյանը:

27. Լողի մրցույթից առաջ չորս սպորտսմենների՝ Ա, Բ, Գ, Դ-ի հետ հարցազրույց անցկացվեց:

Ա-ն ասաց. «Ես կլինեմ առաջինը»,

Բ-ն ասաց. «Ես չեմ լինի վերջինը»,

Գ-ն ասաց. «Ես չեմ լինի առաջինը և ոչ էլ՝ վերջինը»,

Դ-ն ասաց. «Ես կլինեմ վերջինը»:

Լողից հետո պարզվեց, որ միայն մեկ լողորդն էր սխալ կանխատեսել արդյունքը: Լողորդներից ո՞վ էր սխալվել:

28. Սեղանին դրված են երեք միատեսակ փակ արկղեր. նրանցից մեկում գտնվում է երկու սև գնդակ, մյուսում՝ 2 սպիտակ գնդակ, իսկ երրորդում՝ 1 սև և 1 սպիտակ գնդակ: Արկղերին փակցված են պիտակներ՝

«2 սպիտակ», «2 սև», «սև և սպիտակ»:

Հայտնի է, որ պիտակներից ոչ մեկը չի համապատասխանում տվյալ արկղի պարունակությանը: Արկղերից որևէ մեկից միայն 1 գնդակ հանելով ինչպե՞ս կարելի է որոշել պիտակների ճիշտ համապատասխանությունը:

29. Փակ արկղում գտնվում են 60 գնդակ, որոնցից 15-ը կարմիր են, 15-ը՝ կանաչ, 20-ը՝ դեղին, իսկ մնացածները կապույտ և սպիտակ: Ամենաքիչը քանի՞ գնդակ է հարկավոր հանել արկղից, որպեսզի նրանց մեջ հաստատ լինեն միևնույն գույնի 10 գնդակ:

30. Արկղում կան հարյուրավոր դրոշակներ՝ կարմիր, կանաչ, դեղին, կապույտ: Մթության մեջ ընտրվում են դրոշակներ: Ամենաքիչը ի՞նչ քանակով դրոշակ պետք է հանել, որպեսզի նրանցում լինեն միևնույն գույնի առնվազն 10 դրոշակ:

31. Արկղում գտնվում են 70 գնդակներ՝ 20 կարմիր, 20 կանաչ, 20 դեղին, մնացածները սև և սպիտակ: Գնդակներն իրարից տարբերվում են միայն գույներով: Մթության մեջ ես ընտրում եմ գնդիկներ: Ամենաքիչը քանի՞ գնդիկ ես պետք է վերցնեմ, որպեսզի ունենամ.

ա) միևնույն գույնի առնվազն 10 գնդիկ,

բ) տարբեր գույների առնվազն 3 գնդակ:

32. Մայրիկը պատրաստեց կարկանդակներ՝ 20-ը ջեմի միջուկով, 15-ը՝ մսով, 10-ը՝ կաթնաշոռով: Ամենաքիչը ի՞նչ քանակով կարկանդակներ է հարկավոր վերցնել, որպեսզի նրանցում լինի 3-ից ոչ պակաս կարկանդակ, ա) ջեմով, բ) միևնույն միջուկով, գ) տարբեր միջուկներով: (Կարկանդակը կիսել չի կարելի):

33. Արկղում գտնվում են միատեսակ՝ 5 կարմիր, 7 կապույտ և 3 կանաչ փոքրիկ գնդակներ: Պատահականորեն հանվում են գնդակներ (արկղում եղած գնդակները չեն երևում): Առնվազն քանի՞ գնդակ պետք է հանել, որպեսզի նրանցից.

ա) երկուսը լինեն միևնույն գույնի,

բ) երկուսը լինեն տարբեր գույների,

գ) երեքը լինեն միևնույն գույնի,

դ) երեքը լինեն տարբեր գույների:

34. Արկղում գտնվում են 13 կարմիր և 17 սպիտակ գնդակներ: Թույլատրվում է կատարել հետևյալ գործողությունները (ցանկացած հերթականությամբ և ցանկացած թվով).

ա) ավելացնել 2 կարմիր գնդակ և վերցնել 1 սպիտակ գնդակ;

բ) ավելացնել 1 կարմիր և 2 սպիտակ գնդակներ,

գ) վերցնել 2 կարմիր գնդակ և ավելացնել 1 սպիտակ գնդակ,

դ) վերցնել 1 կարմիր գնդակ և ավելացնել 2 սպիտակ գնդակներ:

Հնարավո՞ր է այդպիսի գործողությունների կատարմամբ հասնել այն բանին, որ արկղում լինեն 37 կարմիր և 43 սպիտակ գնդակ:

35. Միևնույն տողում գրեք հինգ թվեր այնպես, որ ցանկացած երկու հարևան թվերի գումարը լինի բացասական, իսկ բոլոր թվերի գումարը լինի դրական:

36. 1, 2, 3, …, 8, 9 թվերը դասավորված են եռանկյան գագաթներում և կողմերի վրա այնպես, որ բոլոր կողմերի վրա գրված չորսական թվերի (ներառյալ գագաթների թվերը) գումարներն իրար հավասար են: Ապացուցեք, որ եռանկյան գագաթներում նշված թվերի գումարը կախված չէ թվերի դասավորությունից: Ինչի՞ է հավասար այդ գումարը: Բերեք այդպիսի դասավորության որևէ օրինակ:

37*. Հնարավո՞ր է արդյոք 1, 2, 3, …, 9, 10 թվերը դասավորել շրջանաձև այնպես, որ.

ա) ոչ մի երկու հարևան թվերի գումարը չբաժանվի ո՛չ 3-ի, ո՛չ 5-ի և ո՛չ էլ 7-ի;

բ) ցանկացած երկու հարևան թվերի գումարը բաժանվի 3-ի:

38*. 7x7 չափսի քառակուսու բոլոր վանդակները լրացված են թվերով այնպես, որ յուրաքանչյուր տողում գտնվող թվերի արտադրյալը բացասական է: Ապացուցեք, որ մի որևէ սյունակում գտնվող թվերի արտադրյալը նույնպես բացասական է:

39*. 5x5 չափսի քառակուսու բոլոր վանդակները լրացված են մեկական թվերով այնպես, որ հորիզոնական ուղղությամբ երկու շարքերից յուրաքանչյուրում գրված թվերի արտադրյալը դրական է, իսկ մյուս երեք շարքերից յուրաքանչյուրում եղած թվերի արտադրյալը՝ բացասական: Հնարավո՞ր է, որ այդ պայմաններով ուղղաձիգ ուղղությամբ երեք շարքերից յուրաքանչյուրում եղած թվերի արտադրյալը լինի դրական, իսկ երկու շարքերից յուրաքանչյուրում եղած թվերի արտադրյալը՝ բացասական:

40*. Հնարավո՞ր է 1-ից մինչև 30 բնական թվերը տրոհել 3-ական թիվ պարունակող տասը խմբի այնպես, որ յուրաքանչյուր խմբում գտնվող թվերից մեկը հավասար լինի մյուս երկուսի գումարին:

41*. Գրատախտակին գրված են 1-ից մինչև 50 բնական թվերը: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է ջնջել այդ թվերից երկուսը և փոխարենը գրել այդ թվերի տարբերության մոդուլը: Հնարավո՞ր է, որ այդպիսի մի քանի քայլերից հետո գրատախտակին մնա միայն 0 թիվը: Պատասխանը հիմնավորեք:

42*. Գրատախտակին գրված են 1-ից մինչև n բոլոր բնական թվերը: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է ջնջել այդ թվերից երկուսը և փոխարենը գրել այդ թվերի տարբերության մոդուլը: Հնարավո՞ր է այդպիսի քայլերի կատարմամբ հասնել նրան, որ գրատախտակին մնա միայն 0 թիվը, եթե.

ա) $n = 210$, բ) $n = 211$:

43. Պետրոսը ծնվել է 20-րդ դարի երկրորդ կեսին: n^2 թվականին նա կդառնա n տարեկան: Ո՞ր թվականին է ծնվել Պետրոսը:

44. Բնական թվից հանեցին նրա թվանշանների գումարը, ստացված թվից նորից հանեցին նրա թվանշանների գումարը և այդպես շարունակ: Այդպիսի 11 քայլերից հետո առաջին անգամ է ստացվում 0 : Ո՞ր թվից են սկսել:

45. Բանկի աշխատակցուհին հաճախորդին այսպես բացատրեց. «Ձեր ներդրած գումարը մեկ տարում ավելանում է 200%-ով, այսինքն՝ մեծանում է 2 անգամ»: Ինչո՞ւմ սխալվեց աշխատակցուհին և ինչպե՞ս կարելի է ուղղել ասածը, եթե տոկոսների թիվը ճիշտ է նշված:

46. A բազմությունը բաղկացած է բնական թվերից, ընդ որում.

1) $1 \in A$,

2) եթե $a \in A$, ապա $(2a+1) \in A$;

3) եթե $(3a+1) \in A$, ապա $a \in A$:

Ճի՞շտ է, արդյոք, որ $8 \in A$:

47. Ունենալով 5 լ և 7 լ տարողությամբ երկու աման, ինչպե՞ս կարելի է ջրի ծորակից վերցնել 6 լ ջուր:

48. Ինչպե՞ս կարելի է յոթլիտրանոց դույլի և երեքլիտրանոց տարայի միջոցով ծորակից վերցնել 5 լիտր ջուր (կա դատարկ աման, որի մեջ պետք է լցվի 5 լ ջուր):

49. Ինչպե՞ս կարելի է 5 լ և 17 լ տարողությամբ երկու բիդոնի միջոցով կաթի ցիստեռնից վերցնել 13 լ կաթ:

50. Ջրի ծորակից ինչպե՞ս կարելի է վերցնել 1 լիտր ջուր, ունենալով միայն 7 լիտրանոց և 12 լիտրանոց երկու դատարկ ամաններ:

51. Ունենալով 4 լ և 5 լ-անոց տարրաներ, հնարավո՞ր է ջրի ծորակից դույլի մեջ լցնել 3 լ ջուր (դույլի տարողությունը 3լ-ից ավել է):

52. Ունենալով 9 լիտրանոց և 12 լիտրանոց տարաներ, հնարավո՞ր է ջրի ծորակից վերցնել ճիշտ 4 լիտր ջուր:

53. Դասարանի 22 աշակերտներից 14-ը զբաղվում է լողով, 10-ը մասնակցում է մաթեմատիկայի արտադասարանական պարապմունքներին: Քանի՞ աշակերտ է մասնակցում և՛ լողի, և՛ մաթեմատիկայի պարապմունքներին, եթե դասարանում չկա աշակերտ, որ չմասնակցի այդ պարապմունքներից գոնե մեկին:

54. Դասարանում սովորում են 30 աշակերտ: Էքսկուրսիայի ժամանակ 23 աշակերտ գնացին թանգարան, 21 աշակերտ՝ կինո, 5 աշակերտ չգնացին ո՛չ կինո և ո՛չ էլ՝ թանգարան: Քանի՞ աշակերտ գնացին և՛ թանգարան, և՛ կինո:

55. Մեր դասարանում կա 24 աշակերտ: Նրանցից 15-ը սիրում են շներին, 12-ը՝ կատուներին, ընդ որում, 7 աշակերտ սիրում են և՛ շներին, և՛ կատուներին: Մեր դասարանցիներից քանի՞սը չեն սիրում ո՛չ շներին և ո՛չ էլ՝ կատուներին:

56. Մեր դասարանը բաղկացած է 30 աշակերտից: Էքսկուրսիայի ժամանակ թանգարան այցելեց 23 աշակերտ, կինո և թանգարան՝ 6 աշակերտ, իսկ 2-ը չգնացին ո՛չ կինո և ո՛չ էլ թանգարան: Մեր դասարանի քանի՞ աշակերտ գնաց կինո:

57. Դասարանի 25 աշակերտներից 12-ը հաճախում է մաթեմատիկական խմբակ, 9-ը՝ տնտեսագիտական խմբակ, 8 աշակերտ ոչ մի խմբակ չեն հաճախում: Տնտեսագետներից քանի՞սն են հրապուրվում մաթեմատիկայով:

58. Դասարանի այն աղջիկները, որոնք սիրում են մաթեմատիկա, այնքան են, որքան այդ դասարանի այն տղաներն են, որոնք չեն սիրում մաթեմատիկա: Դասարանում ովքե՞ր են շատ՝ որոնք սիրում են մաթեմատիկա, թե՞ տղաները:

59. Եկան 100 տուրիստ: Նրանցից 10-ը չգիտեն ո՛չ գերմաներեն, ո՛չ ֆրանսերեն լեզու, 75-ը գիտեն գերմաներեն և 83-ը գիտեն ֆրանսերեն: Քանի՞ տուրիստ գիտեն և՛ ֆրանսերեն, և՛ գերմաներեն:

60. Սպորտային ճամբարում տղաների 65 %-ը կարողանում է խաղալ ֆուտբոլ, 70 %-ը՝ վոլեյբոլ, 75 %-ը՝ բասկետբոլ: Ո՞րն է ամենափոքր տոկոսն այն տղաների, որոնք կարողանում են խաղալ և՛ ֆուտբոլ, և՛ վոլեյբոլ, և՛ բասկետբոլ:

61*. Մաթեմատիկոսների մեջ յուրաքանչյուր ութերորդը փիլիսոփա է, իսկ փիլիսոփաների մեջ յուրաքանչյուր տասներորդը՝ մաթեմատիկոս: Ովքե՞ր են շատ՝ մաթեմատիկոսները, թե՞ փիլիսոփաները:

62. Երեք որսորդ որոշեցին անտառում բրնձով ապուր եփել: Առաջին որսորդն իր կողմից տվեց երկու բաժակ բրինձ, երկրորդը՝ մեկ բաժակ: Քանի որ երրորդ որսորդը բրինձ չուներ, ընկերներին տվեց հինգ փամփուշտ: Ինչպե՞ս պետք է բաժանեն փամփուշտները առաջին երկու որսորդները:

63. Հարթությունը ներկված է երկու գույնով: Ապացուցեք, որ գոյություն ունեն նույն գույնով ներկված երկու կետ, որոնց հեռավորությունը 1 մետր է:

64*. Ապացուցեք, որ ցանկացած 6 մարդկանցից կգտնվեն երեքը, որոնք զույգ առ զույգ անծանոթ են, կամ երեքը, ովքեր զույգ առ զույգ ծանոթ են:

65*. Գյուղի դպրոցում սովորում են 20 աշակերտ: Նրանցից ցանկացած երկուսն ունեն ընդհանուր պապ: Ապացուցել, որ պապերից մեկն այդ դպրոցում ունի առնվազն 14 թոռ: (Ցուցում. ոչ մի երեխա չի կարող ունենալ երկուսից ավել պապ):

66*. Շախմատային մրցությանը մասնակցում են 15 շախմատիստ: Հնարավո՞ր է այդ մրցույթն անցկացնել այնպես, որ յուրաքանչյուր շախմատիստն ունենա ճիշտ 7 հանդիպում:

67*. Վոլեյբոլի մրցույթում, որտեղ ամեն թիմ մյուս թիմերի հետ խաղում է մեկական անգամ, թիմերի 20 %-ը ոչ մի հաղթանակ չունեցան: Քանի՞ թիմ էր մասնակցում մրցույթին:

68*. Շախմատային մրցաշարին մասնակցում էին յոթերորդ դասարանցի 2 աշակերտ և որոշ քանակով ութերորդցիներ: Յուրաքանչյուր մասնակից մյուսներից յուրաքանչյուրի հետ խաղաց մեկ անգամ: Երկու յոթերորդցիները միասին հավաքեցին 8 միավոր, իսկ ութերորդցիները՝ հավասար քանակով միավորներ (յուրաքանչյուր խաղում հաղթանակի դեպքում հաղթողին տրվում է 1 միավոր, ոչ-ոքի ավարտի դեպքում՝ 0,5-ական միավոր): Քանի՞ ութերորդցի էին մասնակցում մրցույթին:

69*. Միատեսակ 9 մետաղադրամներից մեկը կեղծ է. այն մյուսներից թեթև է: Ինչպե՞ս կարելի է նժարավոր կշեռքի երկու կշռումով որոշել կեղծ մետաղադրամը (կշռաքարեր չկան):

70*. 81 մետաղադրամներից մեկը կեղծ է (ավելի թեթև է): Ինչպե՞ս հայտնաբերել այն՝ նժարավոր կշեռքի ընդամենը 4 կշռումով:

71*. Արտաքնապես իրարից չտարբերվող 76 գնդիկներից մեկն ավելի թեթև է: Պահանջվում է նժարավոր կշեռքի չորս կշռումով հայտնաբերել թեթև գնդիկը (կշռաքարեր չկան):

72*. Արտաքնապես իրարից չտարբերվող 79 մետաղադրամներից մեկը կեղծ է (ավելի թեթև): Ինչպե՞ս գտնել այն՝ օգտվելով նժարավոր կշեռքի 4-ից ոչ ավելի կշռումից:

73*. Ունենք մետաղադրամների 100 կույտ, յուրաքանչյուրում 100 մետաղադրամ: Կույտերից մեկում եղած մետաղադրամները կեղծ են, որոնցից յուրաքանչյուրը մեկ գրամով թեթև է իսկական մետաղադրամից: Իսկական մետաղադրամը կշռում է 10 գրամ: Էլեկտրոնային մեծ կշեռքի մեկ կշռումով ինչպե՞ս հայտնաբերել կեղծ մետաղադրամներով կույտը:

74*. Ունենք վեց միանման կշռաքար, որոնց կշիռները կազմում են 1գ., 2գ.,...,6գ. և նրանց վրա փակցված են <1գ.>, <2գ.>,..., <6գ.> գրառմամբ պիտակներ: Կարելի՞ է նժարավոր կշեռքի երկու կշռումով որոշել, թե ճի՞շտ են արդյոք պիտակները փակցված կշռաքարերին:

75*. Դատի ժամանակ, որպես իրեղեն ապացույց, ներկայացված են 14 մետաղադրամ: Դատարանին հայտնի է, որ կեղծ մետաղադրամներն ունեն միևնույն քաշը, իսկականները՝ միևնույն, և որ կեղծ մետաղադրամներն ավելի թեթև են իսկականներից: Փորձագետը նժարավոր կշեռքի երեք կշռումով (առանց կշռաքարերի) հայտնաբերեց, որ 1-ից 7-րդ մետաղադրամները կեղծ են, իսկ 8-ից 14-րդը՝ իսկական: Ինչպե՞ս դա նրան հաջողվեց:

76. Շախմատի տախտակի վանդակների կենտրոններում ամենաշատը քանի՞ մեխ կարելի է խփել, որպեսզի մեխերից առաջացած հետքերից (կետերից) և ոչ մի երեքը չգտնվեն միևնույն ուղղի վրա:

77. Հնարավո՞ր է շախմատի տախտակի վանդակներում դնել ձիերի 32 խաղաքարեր այնպես, որ նրանցից ոչ մի երկուսը չխփեն իրար:

78. Շախմատի տախտակի վրա ինչպե՞ս կարելի է դասավորել 16 նավակ այնպես, որ յուրաքանչյուր նավակը չխփի 2-ից ավելի նավակի (եթե երեք նավակ գտնվում են միևնույն հորիզոնական կամ ուղղաձիգ շերտում, ապա ծայրերի նավակները իրար չեն խփում):

79. Գիշեր է: Տղան, հայրը, մայրը և տատիկը գտնվում են գետի մի ափին և ուզում են անցնել մյուս ափ: Նրանք ունեն մեկ լապտեր: Կամրջով կարող են անցնել երկուսից ոչ ավել մարդ և պարտադիր՝ լապտերով: Հայրը կարող է կամուրջն անցնել 1 րոպեում, տղան՝ 2, մայրը՝ 5, իսկ տատիկը՝ 10 րոպեում: Ամենաքիչը որքա՞ն ժամանակում նրանք կարող են տեղափոխվել գետի մյուս ափը:

80*. Կլոր սեղանի շուրջը նստած են յոթ թզուկ: Նրանցից յուրաքանչյուրի դիմաց դրված է բաժակ: Այդ բաժակներից մի քանիսը լցված են կաթով: Թզուկներից մեկն իր բաժակի եղած ամբողջ կաթը հավասարաչափ լցրեց մյուսների բաժակները: Այնուհետև նույնը կրկնեց իր աջ կողմում նստած թզուկը և այդպես շարունակ: Երբ վերջին՝ յոթերորդ թզուկը իր բաժակի պարունա-կությունը հավասարաչափ լցրեց մյուսների բաժակները, յուրաքանչյուր բաժակում ստացվեց այնքան կաթ, որքան կար սկզբում: Բոլոր բաժակներում միասին 3 լիտր կաթ է: Սկզբում որքա՞ն կաթ կար յուրաքանչյուր բաժակում:

81. Սարանիստ գյուղի բնակիչները միշտ ճիշտ են խոսում, իսկ հարևան՝ Հարթանիստ գյուղի բնակիչները միշտ ստում են: Եկվորը, անցնելով այդ գյուղերը բաժանող ճանապարհով, հանդիպեց տեղի A, B, C բնակիչներին: Նրանցից մեկը Սարանիստից էր, իսկ մյուս երկուսը՝ Հարթանիստից:
- Որտեղի՞ց եք Դուք,-հարցրեք եկվորը A-ին:
Ճանապարհով անցնող մեքենայի աղմուկի պատճառով A-ի պատասխանն անհասկանալի դարձավ եկվորին: Վերջինս դիմեց B-ին և C-ին.
- Նա ի՞նչ պատասխանեց:
Նրանցից յուրաքանչյուրն ասաց. «Նա ասաց, որ ինքը Հարթանիստից է»:
Ելնելով այդ խոսակցությունից՝ կարո՞ղ եք գուշակել, թե որ գյուղում է ապրում A, B, C մարդկանցից յուրաքանչյուրը:

82*. Հայտնի է, որ A քաղաքի բնակիչները միշտ ճիշտ են խոսում, B քաղաքի բնակիչները միշտ ստում են, իսկ C քաղաքի բնակիչները իրար հետևից տրված երկու հարցերից մեկին ճիշտ են պատասխանում, իսկ մյուսին՝ ոչ ճիշտ: Հայտնի է նաև, որ այդ երեք քաղաքների բնակիչների միջև մշտական փոխայցելություններ կան: Ճանապարհորդը հայտնվում է այդ քաղաքներից մեկում և ուզում է պարզել, թե ինքը որ քաղաքում է: Առաջին հանդիպող մարդուն տալով ընդամենը չորս հարց, նա իմացավ, թե որ քաղաքում է հայտնվել և հանդիպած մարդը որ քաղաքից է: Ի՞նչ հարցեր տվեց ճանապարհորդը:

83. Շոկոլադի ուղղանկյունաձև սալիկը բաղկացած է 5x8 հավասար կտորներից: Անհրաժեշտ է սալիկի գծերով բաժանող կտորները կտրտել 40 միանման կտորների: Քանի՞ անգամ կկոտրվի սալիկը:

84*. Թագավորը կանչեց պալատական երեք իմաստուններին և այսպիսի հանձնարարություն տվեց.
«Անհրաժեշտ է պատրաստել 10 այնպիսի կշռաքարեր, որոնց միջոցով հնարավոր լինի կշռել 1գ-ից մինչև 1000 գ. (արտահայտված ամբողջ թվերով) ոսկի: Ձեզ մեկ ժամ ժամանակ եմ

տալիս. լուծեք այդ պնդիրը: Ձեզանից նա, ով ճիշտ կվճռի այս հարցը, կդառնա իմ գլխավոր խորհրդականը»:
Մեկ ժամ անց, երբ թագավորը նորից կանչեց իմաստուններին, նրանցից երկուսը տեղեկացրին, որ իրենց չի հաջողվել լուծել տրված առաջադրանքը: Երրորդ իմաստունը ներկայացնում է առաջադրված հարցի լուծումը: Փորձեք Դուք ևս լուծել այդ խնդիրը: Ի՞նչ կշռաքարեր են անհրաժեշտ:
Ծանոթություն: Կշռաքարերը դրվելու են կշեռքի միայն մի նժարին:

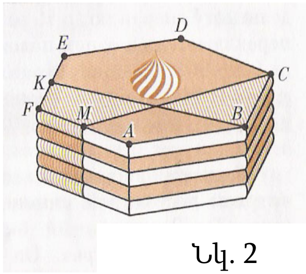
85. Ձիավազքում մասնակցում են երեք ձի՝ A, B և C: Խաղադրույքները նրանց հաղթանակների համար ունեն համապատասխանաբար հետևյալ հարաբերակցությունները՝ 1:1, 1:2 և 1:6 : Սա նշանակում է, որ եթե օրինակ, խաղացողը խաղադրույք է կատարել B ձիու վրա, և ձին առաջինն է հատել վերջնագիծը, ապա նա ստանում է դրված գումարը ու ևս այդ գումարի կրկնապատիկը: Տվյալ ձիու պարտության դեպքում կորցնում է ողջ գումարը: Խաղացողն ունի 205 դոլլար: Կարո՞ղ է արդյոք նա շահել երաշխավորված որևէ գումար: Եթե այո, ապա որքա՞ն գումար:

86. Ա, Բ, Գ, Դ շախմատիստների միջև անցկացվեց մեկ շրջանով մրցաշար (յուրաքանչյուր 2 շախմատիստ խաղացել են մեկ անգամ): Առաջին տեղը գրավեց Ա-ն, որը, ինչպես և Բ-ն, ոչ մի պարտություն չունեցավ: Վերջին տեղը գրավեց Դ-ն, որը, ինչպես և Գ-ն, ոչ մի անգամ չհաղթեց: Լրացրեք մրցաշարային աղյուսակը, պայմանով, որ Ա-ն ունի առնվազն երկու հաղթանակ:

87. Համաժողովին ներկայացան տարբեր երկրների 100 ներկայացուցիչներ: Հայտնի է, որ նրանցից ցանկացած 3-ը կարող են հաղորդակցվել մեկը մյուսի հետ՝ առանց ուրիշների օգնության (նրանցից մեկը կարող է ծառայել որպես թարգմանիչ մյուս երկուսի համար): Ապացուցել, որ բոլոր պատգամավորներին կարելի է տեղավորել հյուրանոցի երկտեղանոց համարներում այնպես, որ յուրաքանչյուր համարում գտնվող անձինք կարողանան հաղորդակցվել միմյաց հետ:

88*. Միջազգային համաժողովին ներկայացան 20 երկրների 40 պատվիրակ: Յուրաքանչյուր երկրի պատվիրակության կազմում երկուսն էին՝ տվյալ երկրի նախագահը և վարչապետը: Մինչ համաժողովը սկսելը որոշ մասնակիցներ միմյանց ողջունեցին ձեռքսեղմումներով, բայց միևնույն երկրի պատվիրակները միմյանց չեն ողջունել: Ընդմիջմանը M երկրի նախագահը հարցրեց հարցնել մյուս բոլոր պատվիրակներին, թե նրանք քանի՞ մասնակցի են ողջունել: Նրանցից ստացված բոլոր պատասխանները եղան միմյանցից տարբեր թվեր: Քանի՞ ձեռքսեղմում է կատարել M երկրի վարչապետը:

89. Իր ծննդյան օրը Անին պատրաստեց կանոնավոր վեցանկյան ($ABCDEF$) տեսք ունեցող տորթ: Կտրելով տորթն այնպես, ինչպես ցուցադրված է նկար 2-ում (M և K կետերը համապատասխանաբար AF և FE հատվածների միջնակետերն են), նա երկու ընդգծված կտորներից եռանկյունաձևը տվեց Արամին, իսկ քառանկյունաձևը՝ Աշոտին: Ո՞ւմ հասավ տորթի ավելի մեծ կտոր:



Նկ. 2

90*. Թագավորը որոշեց պալատական երեք՝ A, B և C իմաստունների ենթարկել փորձության: Նա հայտարարեց, որ իր մոտ կա 2 սպիտակ և 3 սև գլխարկ: Այնուհետ կապեցին իմաստունների աչքերը և բոլորի գլխին դրեցին սև գլխարկներ: Երբ բացեցին իմաստունների աչքերը, թագավորն ասաց.

«Կարո՞ղ է ձեզնից որևէ մեկը որոշել իր գլխարկի գույնը¦:

Իմաստունները պատասխանեցին.

A «Ո'չ, ես կարող եմ սխալվել»:

B «Ո'չ, ես նույնպես կարող եմ սխալվել»:

C «Այո', իմ գլխին սև գլխարկ է»:

C իմաստունին ինչպե՞ս հաջողվեց ճիշտ կողմնորոշվել:

91*. Թագավորը որոշեց փորձության ենթարկել իր երեսուն իմաստուններին և հայտարարեց. հաջորդ օրը նրանց կապված աչքերով, բոլորին շարք կկանգնեցնի և բոլորի գլխին կդնի սև կամ սպիտակ գլխարկ: Այնուհետև, երբ կբացվեն բոլորի աչքերը, յուրաքանչյուրը, սկսած վերջից, հերթով կբացականչի իր գլխարկի հավանական գույնը: Սխալված իմաստունը կպատժվի: Իմաստուններն ունեն մեկ օր ժամանակ՝ պայմանավորվելու ու որոշելու, թե ինչպես գործել փորձության ժամանակ: Քանի՞ իմաստունի կհաջողվի զերծ մնալ պատժից:

§ 5. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. BAC սուր անկյան ներքին P կետից անկյան AB և AC կողմերին տարված են համապատասխանաբար PC_1 և PB_1 ուղղահայացները: Ապացուցել, որ $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$:

2. ABC սուրանկյուն եռանկյան A գագաթից տարված է AH բարձրությունը, O-ն եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցել, որ $\angle BAH = \angle OAC$:

3. Երկու շրջանագծեր հատվում են M և K կետերում: Այդ կետերով տարված են ուղիղներ, որոնք առաջին շրջանագիծը հատում են A և C կետերում, իսկ երկրորդը՝ B և D կետերում: Ապացուցել, որ $AC \parallel BD$:

4. Երկու շրջանագծեր արտաքնապես շոշափվում են M կետում: Այդ կետով տարված են AB և CD ուղիղները, որոնք առաջին շրջանագիծը հատում են A և C կետերում, իսկ երկրորդը՝ B և D կետերում: Ապացուցել, որ $AC \parallel BD$:

5. Երկու շրջանագծեր ներքնապես շոշափվում են M կետում: Այդ կետով տարված են AB և CD ուղիղները, որոնք առաջին շրջանագիծը հատում են A և C կետերում, իսկ երկրորդը՝ B և D կետերում: Ապացուցել, որ $AC \parallel BD$:

6. A անկյան ներքին տիրույթի M կետից տարված են անկյան կողմերին MP և MQ ուղղահայացները, իսկ A կետից PQ հատվածին AK ուղղահայացը: Ապացուցել, որ $\angle PAK = \angle MAQ$:

7. ABC եռանկյան մեջ տարված են AA_1 և BB_1 միջնագծերը: Ապացուցել, որ եթե $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, ապա AC=BC:

8. ABC սուրանկյուն եռանկյան AK և BL բարձրությունները հատվում են O կետում: Ապացուցել, որ $\angle BLK = \angle OCB$:

9. Երկու շրջանագծեր ներքնապես շոշափվում են S կետում: Մեծ շրջանագծի AB լարը փոքր շրջանագիծը շոշափում է P կետում: Ապացուցել, որ SP ճառագայթը կիսում է ASB անկյունը:

10. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը AB և AC կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար D և E կետերում: Ապացուցել, որ ADE եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը պատկանում է առաջին շրջանագծին:

11. ABCD քառանկյանն արտագծած շրջանագծի AB, BC, CD և DA աղեղների միջնակետերը համապատասխանաբար A_1, B_1, C_1 և D_1 կետերն են: Ապացուցել, որ $A_1C_1 \perp B_1D_1$:

12. ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը A, B, C անկյունների կիսորդները հատում է համապատասխանաբար A_1, B_1, C_1 կետերում: Ապացուցել, որ AA_1, BB_1 և CC_1 ուղիղները ուղղահայաց են $A_1B_1C_1$ եռանկյան բարձրությունները պարունակող ուղիղներն են:

13. AA_1, BB_1 և CC_1 ուղիղները պարունակում են ABC եռանկյան բարձրությունները, որոնք եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում են A_1, B_1, C_1 կետերում: Ապացուցել, որ այդ ուղիղները $A_1B_1C_1$ եռանկյան անկյունների կիսորդներն են:

14. ABC եռանկյանն B և C անկյունների կիսորդները հատվում են O կետում: C անկյան կիսորդն ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատում է D կետում: Ապացուցել, որ AD=DO:

15. Քառանկյան հակադիր կողմերը զուգահեռ չեն և շարունակված են մինչև հատվելը: Առաջացած չորս եռանկյուններին արտագծված են շրջանագծեր: Ապացուցել, որ այդ շրջանագծերը հատվում են մեկ կետում (**Միկելի** կետ):

16. ABCD ներգծյալ քառանկյան AB և CD կողմերի շարունակությունները հատվում են P կետում, իսկ BC և AD կողմերի շարունակությունները՝ Q կետում: Ապացուցել, որ CQD և BPC անկյունների կիսորդների և քառանկյան կողմերի հատման կետերը հանդիսանում են շեղանկյան գագաթներ:

17. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը AB և AC կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Դիցուք՝ P-ն MN ուղղի և B անկյան կիսորդի հատման կետն է: Ապացուցել, որ $\angle BPC = 90^0$:

18. Ապացուցել, որ եռանկյան օրթոկենտրոնի համաչափ կետը եռանկյան կողմի նկատմամբ պատկանում է այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծին:

19. Դիցուք՝ H-ը ABC եռանկյան օրթոկենտրոնն է: Ապացուցել, որ ABC, AHB, BHC և AHC եռանկյուններին արտագծված շրջանագծերի շառավիղները հավասար են:

20. ABC սուրանկյուն եռանկյան մեջ տարված են AA_1 և BB_1 բարձրությունները, որոնք հատվում են O կետում: Այնուհետև OBA_1 եռանկյան մեջ տարված է A_1A_2 բարձրությունը, իսկ OAB_1 եռանկյունում՝ B_1B_2 բարձրությունը: Ապացուցել, որ $A_2B_2 \parallel AB$:

21. Դիցուք՝ H-ը ABC սուրանկյուն եռանկյան օրթոկենտրոնն է, իսկ O-ն՝ արտագծած շրջանագծի կենտրոնը: O-ից AC-ին տարված է OE ուղղահայացը: Ապացուցել, որ BH=2OE:

22. Ապացուցել, որ սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունները հանդիսանում են օրթոեռանկյան կիսորդներ:

23. BHC եռանկյունը, որտեղ H-ը ABC եռանկյան օրթոկենտրոնն է, լրացված է մինչև BHCD զուգահեռագիծը: Ապացուցել, որ $\angle BAD = \angle CAH$:

24. ABC սուրանկյուն եռանկյան AD և BE բարձրությունները հատվում են H կետում: ABH եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը AC և BC կողմերը հատում է համապատասխանաբար F և G կետերում: Գտնել FG-ն, եթե DE=5սմ:

25. ABC սուրանկյուն եռանկյան մեջ տարված են BB_1 և CC_1 բարձրությունները:
ա) Ապացուցել, որ A կետից եռանկյանն արտագծած շրջանագծին տարված շոշափողը զուգահեռ է B_1C_1 ուղղին:

բ) Ապացուցել, որ B_1C_1 ուղիղն ուղղահայաց է OA ուղղին, որտեղ O-ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է:

26. ABC սուրանկյուն եռանկյան մեջ տարված են AA_1, BB_1 և CC_1 բարձրությունները: Ապացուցել, որ A_1 կետի համաչափ կետը AC-ի նկատմամբ պատկանում է B_1C_1 ուղղին:

27. Դիցուք՝ AA_1, BB_1 և CC_1-ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունները են: Ապացուցել, որ եթե $A_1B_1 \parallel AB$ և $B_1C_1 \parallel BC$ ապա $A_1C_1 \parallel AC$:

28. Ապացուցել,որ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կամայական կետից եռանկյան կողմերը պարունակող ուղիղներին տարված ուղղահայացների հիմքերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա (**Սիմպսոնի** ուղիղ):

29. P կետից եռանկյան կողմերիը պարունակող ուղիղներին տարված ուղղահայացների հիմքերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա: Ապացուցել, որ P կետը պատկանում է այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծին:

30. ABC հավասարասրուն եռանկյան B գագաթից AC հիմքին տարված է BD զուգահեռ ուղիղը: Հայտնի է, որ BD = BC = AB: Ապացուցել, որ D կետը եռանկյան առներգծյալ շրջանագծի կենտրոնն է:

31. Ապացուցել, որ ABC եռանկյան AB և AC կողմերը շոշափող առներգծյալ շրջանագծերի կենտրոնները միացնող ուղիղն ուղղահայաց է եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը և A գագաթը միացնող ուղղին:

32. Ապացուցել, որ կամայական եռանկյան առներգծյալ շրջանագծերի կենտրոններով կազմված եռանկյունը սուրանկյուն եռանկյուն է:

33. Դիցուք՝ ABC եռանկյան AC և BC կողմերը շոշափող առներգծյալ շրջանագծերը AB ուղիղը շոշափում են համապատասխանաբար P և Q կետերում: Ապացուցել, որ AB և PQ հատվածների միջնակետերը համընկնում են:

34. Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը շոշափող առներգծյալ շրջանագծի շառավիղը հավասար է եռանկյան կիսապարագծին:

35. ABC եռանկյան A անկյունը 120^0 է: BC կողմը շոշափող առներգծած շրջանագծի կենտրոնը O-ն է: Ապացուցել, որ այդ եռանկյան պարագիծը հավասար է OA հատվածին:

36. Դիցուք՝ ABC եռանկյան առներգծած շրջանագծերի կենտրոններն են O_1, O_2 և O_3-ը, իսկ O-ն ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցել, որ O-ն $O_1O_2O_3$ եռանկյան օրթոկենտրոնն է:

37. ABC ուղղանկյուն եռանկյան A անկյունը 30^0 է, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը՝ Գտնել այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի և BC կողմը շոշափող առներգծյալ շրջանագծի կենտրոնների հեռավորությունը:

38. ABC եռանկյան C անկյունը 60^0 է: Գտնել BC կողմը շոշափող՝ 2 շառավղով ներգծած և 3 շառավղով՝ առներգծած շրջանագծերի շոշափման կետերի հեռավորությունը:

39. 3 շառավղով ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագիծը BC կողմը շոշափում է D կետում: BC կողմը E կետում շոշափող առներգծած շրջանագծի շառավիղը 4 է: Գտնել ED-ն, եթե $\angle BCA = 120^0$:

40. AB և BC սրունքներով հավասարասրուն եռանկյան հիմքը 10 է: AC հիմքը շոշափող առներգծած շրջանագծի տրամագիծը 15 է: Գտնել եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

41. ABC եռանկյանը ներգծված շրջանագիծը BC կողմը շոշափում է K կետում, իսկ BC-ն շոշափող առներգծած շրջանագիծն այն շոշափում է L կետում: Ապացուցել, որ $CK = BL = \dfrac{BC + AC - AB}{2}$:

42. O գագաթով անկյան մի կողմի վրա վերցված է A կետը, իսկ մյուս կողմի վրա՝ B և C կետերը, ընդ որում B կետը գտնվում է O և C կետերի միջև: Դիցուք՝ O_1-ը OAB եռանկյանն ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է, իսկ O_2-ը՝ AC կողմը շոշափող OAC եռանկյան առ-

ներգծած շրջանագծի կենտրոնը: Ապացուցել, որ եթե $O_1A=O_2A$, ապա ABC-ն հավասարասրուն եռանկյուն է:

43. Ապացուցել, որ եթե եռանկյանն առներգծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է եռանկյան կիսապարագծին, ապա այն ուղղանկյուն եռանկյուն է:

44. Ապացուցել, որ եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը կիսում է եռանկյան ներգծած և առներգծած շրջանագծերի կենտրոնները միացնող հատվածը:

45. Դիցուք՝ ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը O-ն է, իսկ BC կողմը շոշափող առներգծած շրջանագծի կենտրոնը՝ O_1-ը: Ապացուցել, որ B, O, C և O_1 կետերը պատկանում են միևնույն շրջանագծին:

46. Դիցուք O-ն ABCD քառանկյան ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցել, որ $\angle AOB+\angle COD=180^0$:

47. Ապացուցել, որ եթե քառանկյան անկյունագծերի հատման կետը նրան ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է, ապա այն շեղանկյուն է:

48. Ուռուցիկ քառանկյան յուրաքանչյուր կողմ տրված շրջանագծը հատում է երկու կետում: Ապացուցել, որ եթե այդ շրջանագիծը քառանկյան յուրաքանչյուր կողմից անջատում է հավասար լարեր, ապա տվյալ քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ:

49. 30^0 սուր անկյունով հավասարասրուն սեղանին ներգծված է շրջանագիծ: Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե սեղանի միջին գիծը 10 սմ է:

50. ABC եռանկյան մեջ տարված է CC_1 բարձրությունը: P-ն և Q-ն C_1 կետի պրոյեկցիաներն են համապատասխանաբար AC և BC կողմերի վրա: Ապացուցել, որ եթե CPC_1Q քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ, ապա ABC եռանկյունը հավասարասրուն է:

51. ABC սուրանկյուն եռանկյան AB կողմի վրա գտնել այնպիսի M կետ, որ C-ն, M-ը և M կետի պրոյեկցիաները AC ու BC կողմերի վրա հանդիսանան արտագծյալ քառանկյան գագաթներ:

52. ABC հավասարասրուն եռանկյանը ներգծած O կենտրոնով շրջանագիծը AB և BC սրունքները շոշափում է P և Q կետերում: Ապացուցել, որ BPOQ քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ և գտնել ABC անկյունը, եթե BPOQ-ին ներգծած շրջանագծի շառավիղը հավասար է ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղի կեսին:

53. ABCD քառանկյանը ներգծած O կենտրոնով շրջանագիծը AB, BC, CD և AD կողմերը համապատասխանաբար շոշափում է K, L, M և N կետերում: KN հատվածը կիսում է OA հատվածը, KL-ը՝ կիսում է OB հատվածը, իսկ MN-ը՝ OD հատվածը բաժանում է 1:3 հարաբերությամբ մասերի՝ հաշված O-ից: Գտնել ABCD քառանկյան անկյունները:

54. ABCD արտագծյալ քառանկյան մեջ $AB = CD \neq BC$, իսկ անկյունագծերը հատվում են M կետում: Ապացուցել, որ AMB անկյունը սուր է:

55. ABCD ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և հատվում են O կետում: Հայտնի է, որ AOB և COD եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղների գումարը հավասար է BOC և AOD եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղների գումարին: Ապացուցել, որ.
ա) ABCD քառանկյունն արտագծյալ է,
բ) ABCD քառանկյունը համաչափ է իր անկյունագծերից որևէ մեկի նկատմամբ:

56. ABCD քառանկյունը արտագծված է O կենտրոնով շրջանագծին, իսկ M-ը և N-ը համապատասխանաբար AB և CD կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցել, որ եթե OM:AB=ON:CD , ապա ABCD-ն կամ սեղան է կամ էլ՝ զուգահեռագիծ:

57. Շրջանագիծը շոշափում է ABCD քառանկյան AB, BC և AD կողմերը, իսկ CD կողմի հետ չի հատվում: Ապացուցել, որ

$$AB+CD < AD+BC:$$

§ 6. ՏԱՐԱԲՆՈՒՅԹ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Ես մտապահեցի մի թիվ, նրան ավելացրի 1, ստացվածը բազմապատկեցի 2-ով, այնուհետև բաժանեցի 3-ի և արդյունքից հանեցի 4. ստացվեց 5: Ի՞նչ թիվ էի մտապահել:

2. Երկնիշ թվին ձախից և աջից կցագրեցին 1 թվանշանը: Արդյունքում ստացվեց սկզբնականից 23 անգամ մեծ թիվ: Գտեք երկնիշ թիվը:

3. Երկնիշ թվի առաջին թվանշանը 8 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխենք վերջին տեղը, ապա սկզբնական թիվը կմեծանա 18-ով: Գտեք սկզբնական թիվը:

4. Եռանիշ թիվը վերջանում է 7 թվանշանով: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխենք առաջին տեղը, ապա սկզբնական թիվը կմեծանա 324-ով: Գտեք այդ եռանիշ թիվը:

5. Եռանիշ թիվը վերջանում է 3 թվանշանով: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխենք այդ թվի սկիզբը, ապա նոր թիվը սկզբնական թվի եռապատիկից 1-ով մեծ կլինի: Գտեք սկզբնական թիվը:

6. Վեցանիշ թիվը սկսվում է 2 թվանշանով: Եթե այդ թվանշանն առաջին տեղից տեղափոխենք վերջին տեղը, ապա ստացված թիվը երեք անգամ մեծ կլինի սկզբնականից: Գտեք սկզբնական թիվը:

7. Երեք բեռնատար մեքենաների վրա ինչպե՞ս կարելի է տեղավորել լրիվ լցված 7 տակառ, կիսով չափ լցված 7 տակառ և 7 դատարկ տակառներ այնպես, որ բոլոր մեքենաների վրա լինեն միատեսակ կշռով բեռներ:

8. Ուղիղ գծով պետք է դնել 10 տնկի այնպես, որ ցանկացած հարևան թփերի հեռավորությունը լինի միևնույնը: Գտեք այդ հեռավորությունը, եթե ծայրերի թփերի հեռավորությունը 90 դմ է:

9. Գրքի էջերը համարակալելու համար պահանջվեց ընդամենը 1392 թվանշան: Քանի՞ էջ ունի այդ գիրքը (համարակալումն սկսվում է 1-ից):

10. Գտեք $\frac{5}{7}$-ին հավասար այնպիսի կոտորակ, որի համարիչի և հայտարարի գումարը հավասար լինի 84-ի:

11. Ֆուտբոլային թիմի 11 խաղացողների միջին տարիքը կազմում է 22: Երբ խաղացողներից մեկին հեռացրին դաշտից, մնացած խաղացողների միջին տարիքը դարձավ 21: Քանի՞ տարեկան է հեռացված ֆուտբոլիստը:

12. Արշակը գնեց 5 խնձոր: Դրանք բոլորը՝ առանց առաջինի, կշռում են 798 գ, առանց երկրորդի՝ 794 գ, առանց երրորդի՝ 813 գ, առանց չորրորդի՝ 806 գ, առանց հինգերորդի՝ 789 գ: Որքա՞ն են կշռում բոլոր հինգ խնձորները միասին:

13. Ինչ-որ ամսվա երեք հատ հինգշաբթի օրերի ամսաթվերը զույգ են: Շաբաթվա ո՞ր օրն է այդ ամսվա 26-ը:

14. Մեկ օրվա ընթացքում ժամ և րոպե ցույց տվող սլաքները քանի՞ անգամ են կազմում ուղիղ անկյուն:

15. Համերգային դահլիճում տղաների քանակը կազմում է աղջիկների քանակի 80%-ը: Այդ դահլիճում աղջիկների քանակը տղաների քանակի ո՞ր տոկոսն է կազմում:

16. Սպորտային խմբում աղջիկները կազմում են տղաների թվի 60 %-ը: Խմբի բոլոր մասնակիցների թվի ո՞ր տոկոսն են կազմում աղջիկները:

17. Ճի՞շտ է, արդյոք, հետևյալ պնդումը՝ «Եթե բացասական թվին գումարենք այդ թվի քառակուսին, ապա միշտ կստանանք ոչբացասական թիվ»:

18. Արամն ու Բաբկենը միասին հավաքեցին 3 անգամ ավելի շատ սունկ, քան՝ Գեղամը, Բաբկենն ու Գեղամը միասին՝ 4 անգամ ավելի շատ, քան՝ Արամը: Բաբկե՞նն ավելի շատ սունկ հավաքեց, թե՞ Արամն ու Գեղամը միասին:

Գտեք թվային արտահայտության արժեքը (19-22).

19*. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{24\cdot 25}$:

20*. $\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$:

21*. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 21}$:

22*. $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{4}{33\cdot 37}$:

23. 2 թիվը ներկայացրեք իրարից տարբեր չորս այնպիսի կոտորակների գումարի տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրի համարիչը 1 է, իսկ հայտարարը՝ բնական թիվ:

24. Ընտրեք միմյանցից տարբեր՝ ա) 4 հատ, բ*) 10 հատ այնպիսի կոտորակներ, որոնցից յուրաքանչյուրի համարիչը հավասար լինի 1-ի և նրանց գումարը հավասար լինի 1-ի:

25. Ճի՞շտ է արդյոք անհավասարությունը՝

ա) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}<1$,

բ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}>3$:

Համեմատեք թվերը (26-28).

26. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$ և 1:

27. $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\cdots+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}$ և $\frac{1}{2}$:

28. $\frac{1}{501}+\frac{1}{502}+\frac{1}{503}+\cdots+\frac{1}{549}+\frac{1}{550}$ և $\frac{1}{10}$:

Ո՞ր թիվն է մեծ (22-25).

29. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}$ թե՞ 3:

30. $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 20$ թե՞ $1+2+3+\ldots+999\,999+1\,000\,000$:

31. 3^{400}-ը, թե՞ 80^{100}-ը:

32 $\frac{2^{99}+1}{2^{100}+1}$-ը, թե՞ $\frac{2^{100}+1}{2^{101}+1}$-ը:

33.* $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}$ թե՞ $\frac{3}{4}$:

34*. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$,

բ) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$:

35*. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում անհավասարությունը ճիշտ է.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}<1:$$

36*. Ո՞ր թիվն է մեծ.

ա) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{63}+\frac{1}{64}$ թե՞ 3,

բ) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{2016\cdot 2017}$ թե՞ 1:

37*. Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{994\cdot 997}+\frac{1}{997\cdot 1000}=0,333:$$

38. Գոյություն ունե՞ն իրարից տարբեր m,n,k,p,q բնական թվեր, որոնց համար ճիշտ լինի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1:$$

39. k -ի ի՞նչ ամբողջ արժեքների դեպքում տրված կոտորակը կլինի ամբողջ թիվ.

ա) $\dfrac{k+7}{k+3}$, բ) $\dfrac{2k+19}{k-5}$, գ) $\dfrac{5n+4}{2n-1}$:

40*. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում հավասարությունը ճիշտ է.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{2n}{n+1}:$$

41. Գտնել արտադրյալը.

ա) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{100}\right)\left(1-\dfrac{1}{121}\right)$;

բ)* $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$:

42. Ապացուցել անհավասարությունները.

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}<1$$;

43. Ուսուցչի այն հարցին, թե ինչպես է անցկացնում իր ամբողջ օրը, Տիգրանը պատասխանեց այսպես. «Օրվա $\frac{1}{3}$ մասը քնում եմ, $\frac{1}{4}$ մասն անցկացնում եմ դպրոցում, $\frac{1}{5}$ մասն անցկացնում եմ դրսում՝ ընկերներիս հետ, իսկ $\frac{1}{7}$ մասը՝ նախապատրաստում եմ դասերս կամ զբաղվում եմ համակարգիչով»:

Ուսուցիչը, դիմելով դասարանի աշակերտներին, այսպիսի հարց տվեց. «Տիգրանը ճի՞շտ է արդյոք ներկայացնում իր առօրյան»:

Դասարանի լավ սովորողներից մեկը՝ Արամը տվեց այսպիսի հակիրճ և ճիշտ պատասխան. «Այդպես հնարավոր չէ ապրել»: Եվ նա հիմնավորեց: Իսկ դո՞ւք ինչպես կարող եք հիմնավորել:

44. Մեր դասարանում կան երգողներ և պարողներ: Հայտնի է, որ բոլոր երգողների $\frac{1}{5}$-ը նաև պարում է, իսկ պարողների $\frac{1}{4}$-ը նաև երգում է: Մեր դասարանում ովքե՞ր են շատ՝ երգողնե՞րը, թե՞ պարողները:

45. Արտասահմանյան պատվիրակության անդամներից անգլերեն խոսողների $\frac{1}{6}$-ը խոսում է նաև գերմաներեն, իսկ գերմաներեն խոսողների $\frac{1}{5}$-ը խոսում է նաև անգլերեն: Պատվիրակությունում ովքե՞ր են շատ՝ անգլերե՞ն, թե՞ գերմաներեն խոսողները:

46. Երկու խառատ ստացան առաջադրանք, ըստ որի պետք է պատրաստեին որոշ քանակով դետալներ: Առաջին, երկրորդ և երրորդ օրերը առաջին խառատը պատրաստեց իր առաջադրանքի, համապատասխանաբար, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{11}$ և $\frac{3}{7}$-ը, իսկ երկրորդ խա ռատն այդ օրերին կատարեց իր առաջադրանքի, համապատասխանաբար, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$ և $\frac{9}{20}$-ը: Քանի՞ դետալ պատրաստեց յուրաքանչյուր խառատը երրորդ օրը, եթե նրանց պատրաստած դետալների ընդհանուր քանակը չի գերազանցում 1000-ը:

47. Վեց գյուղացի որոշեցին ձի գնել: Արշակը ներդրեց պահանջվող գումարի $\frac{1}{6}$ մասը, Բաբկենը՝ մնացորդի $\frac{1}{5}$ մասը, Գուրգենը՝ նոր մնացորդի $\frac{1}{4}$ մասը, Դերենիկը՝ այդ պահին չլրացված գումարի $\frac{1}{3}$ մասը, իսկ Երեմն ու Զավենը հավասարապես ներդրումով լրացրին ընդհանուր գումարը: Ձին գնելու համար ո՞ր գյուղացին ավելի շատ գումար ներդրեց:

48. Ինչ-որ երկրի Ազգային ժողովը բաղկացած է 120 պատգամավորից: Նրանցից առնվազն մեկն ազնիվ է: Յուրաքանչյուր զույգ պատգամավորներից առնվազն մեկն անազնիվ է: Ընդամենը քանի՞ ազնիվ պատգամավոր կա այդ երկրի Ազգային ժողովում:

49. 3×3 չափսի քառակուսու 9 վանդակներում նշեք իրարից տարբեր մեկական բնական թվեր այնպես, որ հորիզոնական և ուղղաձիգ ուղղություններով գրված՝ երեքական թվերով կազմված վեց արտադրյալներից յուրաքանչյուրը լինի 840:

50. 3×3 չափսի քառակուսու 9 վանդակներում նշեք իրարից տարբեր 9 բնական թվեր այնպես, որ բոլոր տողերով և բոլոր սյուներով գրված երեքական թվերով կազմված վեց արտադրյալները լինեն միմյանց հավասար: Ապացուցեք, որ այն կարելի է իրագործել բազմաթիվ եղանակներով:

51. Հերթականությամբ, կողք կողքի գրված են 1-ից մինչև 1000 բոլոր ամբողջ թվերը՝ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 998, 999, 1000:
Այդ թվերը գրելիս ո՞ր թվանշանն է ավելի շատ գործածվել.

ա) 0-ն, թե՞ 1-ը, բ) 5-ը, թե՞ 9-ը:

52. Քանի՞ երկնիշ թիվ կարելի է կազմել 1, 2, 3 թվանշաններով (թվանշանները կարող են կրկնվել):

53. Քանի՞ երկնիշ թիվ կա, որոնց գրառման մեջ՝
ա) 5 թվանշանը կա, բ) 5 թվանշանը չկա:

54. 1, 2, 3, 4 թվանշաններով քանի՞ քառանիշ թիվ կարելի է կազմել (թվանշանները կարող են կրկնվել):

55. Գտնել բոլոր այն եռանիշ թվերի գումարը, որոնց գրառման մեջ կարող են լինել միայն 2, 3 կամ 5 թվանշանները (թվանշանները կարող են կրկնվել):

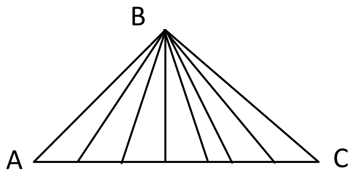
56. Քանի՞ եղանակով կարելի է չորս տարբեր մետաղադրամներ դնել երկու գրպանում:

57. Հարթության վրա նշված են 8 կետ, որոնցից ոչ մի երեքը չեն գտնվում միևնույն ուղղի վրա: Քանի՞ ուղիղներ կարելի է տանել այդ կետերի բոլոր հնարավոր զույգերով:

58. Գրատախտակի վրա նշված են 10 կետ, որոնցից ոչ մի երեքը չեն գտնվում միևնույն ուղղի վրա: Քանի՞ եռանկյուն կարելի է կառուցել, որոնցից յուրաքանչյուրի համար գագաթներն այդ կետերից են:

59. Շրջանագծի վրա նշված են 20 կետ: Այդ կետերով ընդամենը քանի՞ լար կորոշվի (յուրաքանչյուր լարի ծայրակետերն այդ կետերից են):

60. ABC եռանկյան AC կողմը բաժանված է 7 մասի և բաժանման կետերը միացված են B գագաթին (նկ. 4): Քանի՞ եռանկյուն կառաջանա:



Նկ. 4

61. Հատվող ուղիղներից մեկի վրա նշված են 3 կետ, մյուսի վրա՝ 4 կետ. այդ թվում է նրանց հատման կետը: Քանի՞ եռանկյուն գոյություն ունի, որոնց երեք գագաթներն էլ նշված կետերից են:

62. Շրջանագծի վրա նշված է 6 կետ: Տարված են բոլոր այն լարերը, որոնցից յուրաքանչյուրի ծայրակետերը նշված կետերից են:
ա) Քանի՞ լար է տարված:
բ)* Ամենաշատը քանի՞ հատման կետ կունենան այդ լարերը (ծայրակետերը չեն հաշվվում):

63. Դպրոցն ունի 30 դասարան և 760 աշակերտ: Ապացուցեք, որ այդ դպրոցում կա առնվազն 26 աշակերտ ունեցող դասարան:

64. Ութ աշակերտ կերան 10 խնձոր:
ա) Ապացուցեք, որ նրանցից մեկը կերել է առնվազն երկու խնձոր:
բ) Ճի՞շտ է, արդյոք, որ ինչ-որ մեկը կերել է ուղիղ երկու խնձոր:

65. Ապացուցեք, որ ցանկացած 40 մարդկանցից միշտ կգտնվեն չորսը, որոնք իրենց ծննդյան օրը նշում են նույն ամսին:

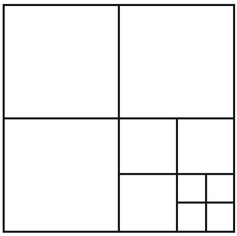
66. Ժամացույցը ցույց է տալիս ժամը 4-ը: Քանի՞ րոպե հետո րոպե ցույց տվող սլաքը կհասնի ժամ ցույց տվող սլաքին:

67. Ժամը 12-ին ժամ ու րոպե ցույց տվող սլաքները համընկնում են: Որքա՞ն ժամանակ անց սլաքները նորից կհամընկնեն:

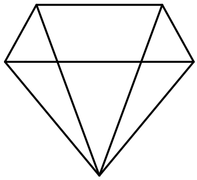
68. Գտեք ժամ և րոպե ցույց տվող սլաքների կազմած փոքր անկյունը, եթե ժամը 12-ն անց է 35 րոպե:

69. Ժամը 12-ն անց 20 րոպեին ի՞նչ անկյուն են կազմում րոպե և ժամ ցույց տվող սլաքները:

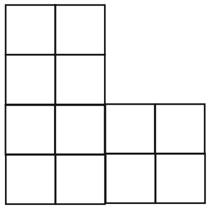
70. Քանի՞ քառակուսի է պատկերված նկ. 5-ում:



Նկ. 5



Նկ. 6



Նկ. 7

71. Քանի՞ եռանկյուն է պատկերված 6-րդ նկարում:

72. Տրված պատկերը բաժանել չորս հավասար պատկերների (նկ. 7):

73. 9 սմ և 16 սմ չափսեր ունեցող ուղղանկյունը կտրատեք երկու այնպիսի հավասար մասերի, որոնցից հնարավոր լինի կազմել քառակուսի:

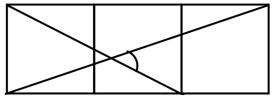
74. Ինչպիսի՞ եռանկյուն է հարկավոր վերցնել, որպեսզի նրանում տանելով մեկ հատված, ստացվեն հայտնի տեսքի բոլոր եռանկյուններից՝ հավասարակողմ, հավասարասրուն, անհավասարակողմ, ուղղանկյուն, սուրանկյուն, բութանկյուն:

75. 5 սմ կողմով քառակուսու ներսում կամայական ձևով նշված են 51 կետ: Ապացուցել, որ այդ կետերի ցանկացած դասավորության դեպքում կարելի է ընտրել նրանցից երեքը, որոնք կգտնվեն 1,5 սմ շառավղով շրջանում:

76. ABC եռանկյան մեջ AB =9սմ, AC =19սմ, $\angle A$ =59^0: Ինչպիսի՞ն է այդ եռանկյունը. սուրանկյո՞ւն, ուղղանկյո՞ւն, թե՞ բութանկյուն: Պատասխանը հիմնավորել:

77. Քառանկյան չորս կողմերի և մեկ անկյունագծի չափումներից ստացան 2, 4, $5\frac{1}{2}$, 10, 15 թվերը: Ինչի՞ է հավասար չափված անկյունագծի երկարությունը:

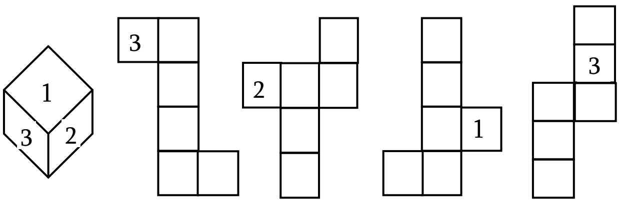
78. Երեք հավասար քառակուսիներ դասավորված են այնպես, ինչպես ցույց է տրված 8-րդ նկարում: Գտեք AC և BD ուղիղների կազմած անկյունը:



Նկ.8

79. Կամայական եռանկյուն կտրատեք երեք այնպիսի մասերի, որ նրանցից հնարավոր լինի կազմել ուղղանկյուն:

80. Նկ. 9 ա)-ում պատկերված է խորանարդ, որի նիստերի վրա գրված են 1, 2, 3, 4, 5, 6 թվերը (մենք տեսնում ենք միայն առաջին երեք թվերը): Հանդիպակաց նիստերի վրա նշված թվերի գումարը հավասար է 7-ի: Այդ խորանարդի չորս փռվածքներից յուրաքանչյուրում ջնջված են հինգ թվերը (թողել են մեկը): Յուրաքանչյուրում վերականգնեք մյուս հինգ թվերը (նկ. 9 բ):



ա) բ)

Նկ. 9

a		*b*
c		*d*

Նկ. 10

81. 3×3 չափսի քառակուսու 9 վանդակներից չորսում (անկյուններում) տրված են միմյանցից տարբեր չորս պարզ թվեր՝ a, b, c, d (նկ. 10): Մնացած վանդակները լրացնել իրարից տարբեր այնպիսի բնական թվերով, որպեսզի հորիզոնական և ուղղաձիգ ուղղություններով գրված՝ երեքական թվերով կազմված վեց արտադրյալները լինեն միմյանց հավասար: Արդյո՞ք միշտ նման արդյունքի կարելի է հասնել, եթե a, b, c, d թվերը փոխարինվեն իրարից տարբեր ցանկացած չորս բնական թվերով:

82. Ունենք արտաքնապես չտարբերվող հինգ միանման դետալներ; Հայտնի է, որ դրանցից չորսը կշռում են հավասար (ստանդարտ են), իսկ մեկը մյուսներից տարբերվում է կշռով (խոտան դետալ է), բայց հայտնի չէ, այն ավելի թեթև՞, թե՞ ավելի ծանր է մյուսներից: Բացի այդ հինգ դետալներից, ձեռքի տակ կա ևս մեկ ստանդարտ դետալ (էտալոն); Նժարավոր կշեռքի երկու կշռումով ինչպե՞ս կարելի է գտնել խոտան դետալը (կշռաքարեր չկան):

83. Խաղում են երկուսով; Նրանցից մեկը բարձրաձայն ասում է 1-ից մինչև 9 (ներառյալ) ամբողջ թվերից որևէ մեկը; Երկրորդն առաջինի ասած թվին գումարում է վերոնշյալ սահմաններում գտնվող որևէ ամբողջ թիվ և բարձրաձայն ասում արդյունքը; Այդ գումարին առաջինը գումարում է նույն միջակայքի որևէ ամբողջ թիվ և բարձրաձայնում է ստացված նոր գումարը և այդպես շարունակ; Հաղթում է նա, ով առաջինը կբարձրաձայնի 100 թիվը; Ինչպե՞ս պետք է խաղա երկրորդը, որպեսզի միշտ հասնի հաղթանակի;

84. Ունենք քարերի (կոճակների, լուցկու հատիկների, մատիտների... միևնույն է) երկու կույտ. մեկում՝ n խաղաքար, մյուսում՝ k: Խաղում են երկուսով՝ հերթով կատարելով իրենց քայլերը: Խաղացողներից յուրաքանչյուրն իր քայլում կարող է վերցնել ցանկացած քանակով խաղաքարեր. կամ առաջին կույտից, կամ երկրորդ կույտից կամ էլ երկու կույտերից միաժամանակ, բայց հավասար քանակով: Հաղթում է նա, ով վերցնում է վերջին քարը: Ո՞վ կհաղթի այդ խաղում՝ խաղն սկսո՞ղը, թե՞ հակառակորդը, եթե.

ա) $n = 10$, $k = 9$;
բ) $n = 10$, $k = 2$;
գ) $n = 5$, $k = 3$:

85*. Հարթության վրա տրված են 15 ուղիղ, որոնցից յուրաքանչյուրը հատում է մյուսները: Ապացուցել, որ նրանցից որևէ երկուսով կազմված անկյունը մեծ չէ 12^0-ից:

86*. 2 կողմով հավասարակողմ եռանկյան ներսում կամայական ձևով նշված են 5 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից կարելի է ընտրել երկուսը, որոնց հեռավորությունը փոքր է 1-ից:

87*. Միավոր կողմով քառակուսու ներսում կամայական ձևով նշված են 201 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից ինչ-որ երեքը կարելի է ծածկել 0,1 կողմով քառակուսիով:

88. 6×8 չափսերով ուղղանկյան ներսում պատահականորեն ընտրված են 5 կետ: Ապացուցել, որ նրանցից գոնե երկուսի հեռավորությունը չի գերազանցում 5-ը:

89*. Շրջանագծի մի քանի աղեղներ ներկված են կանաչ գույնով: Ներկված բոլոր աղեղների երկարությունների գումարը փոքր է շրջանագծի երկարության կեսից: Ապացուցել, որ գոյություն ունի տրամագիծ, որի երկու ծայրերն էլ ներկված չեն:

90*. Առաջին հարյուր բնական թվերից կամայական ձևով ընտրվել են 51 թիվ: Ապացուցել, որ ընտրված թվերից միշտ կգտնվեն երկուսը, որոնցից մեկը բաժանվում է մյուսին:

91*. Ապացուցել, որ գոյություն ունի 2017-ի բազմապատիկ թիվ, որի տասնորդական գրառման մեջ մասնկցում է միայն 7 թվանշանը:

92*. Ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի բնական k թիվ, որի դեպքում $3^k = ...00001$:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

§ 1. Ամբողջ թվեր

2. 17:
3. 90 երկնիշ թիվ, 900 եռանիշ թիվ:
4. ա) 91: բ) $m+k+1$:
5. 21:
6. $2n+1$:
7. 306:
8. 0:
9. 2500:
10. ա) -50, բ) 500:
11. Ոչ:
12. Այո՛, օրինակ 1·(-2)(-2) · 5· (-5) (-1) · 4=400 և 1+(-2)+(-2)+5+(-5)+(-1)+4=0:
13. Այո, օրինակ, ութ հատ 1 և չորս հատ 2 թվերով:
15. 1000=55+56+…+69+70:
16. 17:
17. ա) Ոչ, բ) այո:
18. Ոչ:
19. 24-ի:
20. 25:
21. 841:
22. 119:
23. 999:
24. 7561:
25. 3 որդի, 2 դուստր:
26. 2 և 3:
34. 50:
36. 1:
40. p^2 տեսքի թվերը, որտեղ p-ն ցանկացած պարզ թիվ է:
42. 29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92:
43. 15:
45. 45:
46. 50:

47. Ցուցում: Քանի որ $38^2=1444$, ուստի ցանկացած բնական k-ի դեպքում $(1000k+38)^2=...444$:

49. 45-ով:

50. Բաղադրյալ է:

51. Ցուցում: Օգտվել հետևյալ փաստից՝ եթե թիվը լրիվ քառակուսի է և բաժանվում է 3-ի, ապա այն բաժանվում է նաև 9-ի:

52. Ոչ:

53. $k=2$:

54. 105 263 157 894 736 842:

55. Ոչ:

56. 336:

58. Ցուցում: Համոզվեք, որ ցանկացած ամբողջ թվի քառակուսու թվանշանների գումարը կա՛մ բաժանվում է 3-ի, կամ 3-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ:

60. Ո՛չ:

61. Այո՛: Տե՛ս, օրինակ, նկար 12-ում պատկերված աղյուսակը:

1	6	7	12
2	5	8	11
3	4	9	10

Նկ.12

62. Ցուցում: Նկատել, որ 7-ից մեծ ցանկացած բնական թիվ կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքերից մեկով՝ $3k$, $3k+1$, $3k-1$, որտեղ $k\geq 3$ (k-ն բնական թիվ է): Այնուհետև նկատել, որ $3k+1=3(k-3)+2\cdot 5$, $3k-1=3\left(k-2\right)+1\cdot 5$:

63. Հարկավոր է վերցնել 21 հատ 7 մետրանոց և 4 հատ 5 մետրանոց:

64. Ո՛չ:

65. Ո՛չ: **Ցուցում:** Նկատել, որ առաջին 100 պարզ թվերի գումարը կենտ թիվ է:

66. 800:

67. Ո՛չ: **Ցուցում:** Համոզվել, որ յուրաքանչյուր քայլից հետո ստացված կտորների քանակը 3-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ:

68. 9:

69. Ո՛չ: **Ցուցում:** Համոզվել, որ տրված թվերի գումարը կենտ է:

70. Այո՛, օրինակ, $k+1$, $k+2$, $k+3$, ..., $k+999$, $k+1000$, որտեղ $k=1001!+1$:

71. 502:

73. ա) 4, բ) 0, գ) 1, դ) 1:

74. 4001 և 8004:

75. **Ցուցում:** Համոզվել, որ n^{20} և n^{4} թվերի տասնորդական գրառման վերջին թվանշանները համընկնում են: Նշանակում է՝ ցանկացած բնական n-ի դեպքում n^{20}-ը վերջանում է 0, 1, 5, 6 թվանշաններից մեկով: Այդպիսի թվերից ոչ մի երեքի գումարը չի կարող հավասարվել 9-ի:

76. Միայն 1 հատ զրոյով:

77. Այո:

78. **Ցուցում:** Նկատել, որ այդպիսի թվերից յուրաքանչյուրի թվանշանների գումարը հավասար է 15-ի, որը բաժանվում է 3-ի, բայց չի բաժանվում 9-ի:

81. Չորս:

82. Ութ:

85. **Ցուցում:** Սկզբում համոզվել, որ $P=3$-ը բավարարում է խնդրի պայմաններին: Այնուհետև ցույց տալ, որ $P=3k\cdot 1$ (k-ն բնական թիվ է) տեսքի ցանկացած թվի դեպքում $P+20$ և $P+28$ թվերից առնվազն մեկը բաղադրյալ է:

86. $P=3$:

87. $P=5$:

89. 175:

90. Ո՛չ: **Ցուցում:** Համոզվել, որ այդպիսի ցանկացած թիվ մեծ է 9999^2-ից և փոքր է 10000^2-ից:

91. p^2-p:

98. (1; 8), (7; 6), (9; 4):

99. (7; 5):

100. (4; 9):

§ 2. Բաղդատումներ: Ֆերմայի փոքր թեորեմը

9. 1: **10.** 7: **11.** 1: **12.** 1: **13.** 7: **14.** 7: **15.** 216: **16.** 9: **31.** 3: **32.** 51: **33.** 88: **34.** 616: **35.** 1: **43.** Այո: **44.** Ոչ:
46. Ցուցում: Ապացուցել, որ ցանկացած n-ի դեպքում տրված արտահայտությունը 23-ի բազմապատիկ է:
47. Ցուցում: Երբ $p=2$, վերցնել՝ $n=2m$ $(m\in N)$, իսկ երբ $p>2$, վերցնել՝ $n=(p-1)(pm-1)$ $(m\in Z)$:

§ 3. Հատընտրանք և միացությունների տարրեր

1. $4356=66^2$: **2.** 8: **3.** 26: **4.** 4001 և 8004: **5.** Այո: **6.** Ոչ: **7.** 10: **8.** 15:
9. Այո: 12 թվազույգ: **10.** 15 և 52: **11.** 25: **12.** 5; 8 ; 9; 10 կամ 11: **13.** 552:
14. 14: **15.** 18: **16.** 45: **17.** 24: **18.** 133320: **19.** 18: **20.** 81: **21.** 1152:
22. ա) 1024, բ) 768: **23.** 21: **24.** 25: **25.** ա) 5, բ) 20, գ) $\frac{n(n-3)}{2}$: **26.** 96:
27. ա) 6, բ) 24, գ) 114: **28.** ա) 6, բ) 45, գ) $\frac{n(n-1)}{2}$: **29.** 36: **31.** 45:

§ 4. Տեքստային հետաքրքրաշարժ խնդիրներ

1. 575 ճագար, 425 հավ: **2.** 190: **3.** 10: **4.** 24: **5.** 12 տ., 36 տ.: **6.** 18 տ., 10 տ.: **7.** 15 տ., 25 տ.: **8.** 16 ձու: **9.** Առաջինի: **10.** 255: **11**. 94:
12. Առաջինը՝ 13, երկրորդը՝ 7, երրորդը՝ 4: **13.** 193 մետր: **14.** 12 լ, 8 լ, 7 լ: **15.** 79: **16.** 13 հոգի, 156 խաղ: **17.** 0: **18.** 1,5 ժամ: **19.** Առաջինը: **20.** Մոտ 175 օր: **21.** 8 օրում: **22.** 72 օրում: **23.** 96 կմ/ժ: **24.** 1 ժամ 52 րոպե 30 վրկ հետո: **25.** 216 մետր: **26.** 3 օր 22 ժամ 30 րոպե: **27.** 240 ցատկ:
29. A-ից B: **29**. 30 ժամ: **30**. 9 ժամ: **31**. 4 ժամ: **32**. 84 ժամ:

33. 15 րոպե հետո: **34**. 2 ժամ: **35**. 6 կմ: **36**. 1 ժամ:
37. 40 000: **38.** 1 331 000: **39.** 30 %-ով:
40. 500 կգ: **41.** 50 կգ: **42.** 25 % :
43. 14 կգ: **44.** 12,5 %-ով: **45.** 50 տոննա: **46.** 155տ.:
47. 90 %-ով: **Լուծում:** Դիցուք, թարմ սնկի x%-ն է ջուրը: Այդ դեպքում մնացած՝ $(100-x)$ %-ը չոր զանգված է (ջուր չի պարունակում): Մյուս կողմից, քանի որ չորացած սնկի 12%-ն է ջուրը, ուստի 88%-ը չոր զանգված է: Ակնհայտ է, որ չոր զանգվածի կշիռը փոփոխության չի ենթարկվում: Այդ նկատառումով էլ կունենանք խնդրի հավասարումը՝

$$\frac{44(100-x)}{100}=\frac{5\cdot 88}{100}:$$

Այստեղից էլ գտնում ենք որոնելի x թիվը՝ $x=90$:
48. 100 կգ: **49.** 125 կգ-ով: **50.** Անտառի կեսը:

§ 5. Տրամաբանական խնդիրներ

2. Չի կարելի որոշակի ասել (չի բացառվում, որ նրանք ոչ մի սունկ չգտնեն):
3. 6,5 օր հետո:
4. 12 վայրկյանում:
6. Ընկերներից մեկը ճագարն ստանում է վանդակով:
8. XII-ը այսպես բաժանել երկու հավասար մասերի՝ XII:
10. Մի սեղանի շուրջը նստել են Պապը, նրա որդին և թոռը: Մյուս սեղանի շուրջը նստել են Պապը, նրա հայրը, նրա որդին և նրա թոռը:
13. 5 անգամ:
14. Ստորակետ:
16. Պետրոսն այդ օրն ավելի շատ ժամանակ կորցրեց (միայն ճանապարհի երկրորդ կեսում նա կորցրեց այնքան ժամանակ, որքան անցնում էր ամբողջ ճանապարհը հեծանվով):
19. 39-րդ օրվա վերջում:
20. Հավասար չափով:
22. Մատիտների տուփն արժեր 310 դրամ: Նրանցից մեկն ուներ 10 դրամ, մյուսը՝ 290 դրամ:
23. Ավտոբուսը գնացել է Արարատի ուղղությամբ: Քանի որ ավտոբուսի դռները չեն երևում (գտնվում են հակառակ կողմում), իսկ

ճանապարհային շարժումն աջակողմյան է, դրանով էլ շարժման ուղղությունը դառնում է որոշակի:

24. Ճիշտ չի ասել Հայկը: Առաջին տեղում Գեղամն էր:

25. Աննան հագել էր կապույտ շրջազգեստ, Էլենը՝ կարմիր, Մարիամը՝ սպիտակ, Հասմիկը՝ երկնագույն:

26. Վարդանը:

27. Հնարավոր են հետևյալ տարբերակները. ա) Բ - I, Ա - II, Գ - III, Դ - IV, բ) Բ - I, Գ - II, Ա - III, Դ - IV:

28. **Ցուցում:** Անհրաժեշտ է գնդակը հանել «սև կամ սպիտակ» պիտակով արկղից: Մնացած դատողությունները կատարեք ինքնուրույն:

29. 38:

30. 37:

31. ա) 38; բ) 98:

32. ա) 28; բ) 7; գ) 36:

33. ա) 4; բ) 8, գ) 6; դ) 13:

34. Ո՛չ: **Ցուցում:** Դիցուք, կատարվել են, համապատասխանաբար, n, m, k, p անգամ գործողություններ և արկղում մնացել են պահանջվելիք քանակով գնդակներ: Այդ դեպքում

$$2n+m-2k-p=24 \quad \text{և} \quad -n+2m+k-2p=26 \ :$$

Երկրորդ հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք 2-ով և գումարենք առաջին հավասարությանը, կստանանք՝

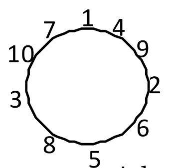
$$5m-5p=76$$

հավասարությունը: Ակնհայտ է, որ m և p ամբողջ արժեքների դեպքում այդպիսի հավասարությունը չի կարող ճիշտ լինել:

36. 15: **Ցուցում:** Դիցուք, գագաթների մոտ գրված թվերն են՝ a, b, c: Այդ դեպքում՝ $(a+b+c)+(1+2+3+...+8+9)=60$,

որտեղից՝ $a+b+c=15$:

37. ա) Այո՛, հնարավոր է: Այդպիսի դասավորություն պատկերված է 13-րդ նկարում: բ) Հնարավոր չէ: Իրոք, եթե այդպիսի դասավորություն լիներ, ապա պարզ է, որ 3 թվի հարևանները պետք է լինեին 3-ի բազմապատիկ թվեր, այսինքն՝ 6 և 9: Վերջին-ների մյուս հարևանները ևս պետք է լինեին 3-ի բազմապատիկ թվեր, որն էլ հնարավոր չէ, քանի որ նշված թվերի մեջ 3-ի բազմապատիկ



Նկ. 13

այլ թիվ չկա: Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ նման դասավորություն չի կարող լինել:

39. Հնարավոր չէ:

40. Ոչ:

41. Հնարավոր չէ: Խնդրի լուծման հիմքում ընկած է հետևյալ փաստը՝ ցանկացած n և k բնական թվերի համար $n+k$ և $|n-k|$ թվերը զույգությամբ համընկնում են, այսինքն՝ միաժամանակ զույգ են կամ միաժամանակ՝ կենտ: Այս փաստի շնորհիվ ցանկացած քայլ կատարելուց հետո ստացված թվերի գումարի զույգությունը համընկնում է (1+2+3+…+50) գումարի զույգության հետ: Իսկ այդ գումարը կենտ թիվ է (նրանում կա ճիշտ 25 հատ կենտ թիվ): Դա նշանակում է, որ կենտ թիվ կստացվի նաև այն դեպքում, երբ գրատախտակին մնա միայն մեկ թիվ: Հետևաբար, 0 թիվը չի կարող վերջինը լինել:

42. **ա)** Հնարավոր չէ: **Ցուցում:** Տե՛ս նախորդ խնդրի լուծումը: **բ)** Հնարավոր է: Բավական է ընտրել (2, 3), (4, 5), (6, 7), …, (210, 211) զույգերը: Որոշ քայլերից հետո գրատախտակին կմնա 106 հատ 1-եր՝ 1, 1, 1, … 1, 1: Ստացված 1-երը զույգ-զույգ վերցնելով, որոշ քայլերից հետո գրատախտակին կունենանք միայն 0-ներ՝ 0, 0, …, 0 (53 հատ): Այնուհետև, յուրաքանչյուր քայլում կպակասի մեկ 0 և, ի վերջո կհասնենք այն բանին, որ գրատախտակի վրա կմնա միայն մեկ հատ 0:

43. Պետրոսը ծնվել է 1980 թվականին: $45^2 = 2025$ թվականին նա կդառնա 45 տարեկան:

44. Այդպիսի թվերը տասն են՝ 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109:

45. Պետք է ասվեր, որ ներդրված գումարը մեկ տարում կդառնա սկզբնական գումարի 200 % (այլապես ավելանում է 100 %-ով):

46. Այո՛: **Ցուցում:** Ելնելով խնդրի պայմաններից՝ ի հայտ բերենք A բազմության որոշ տարրեր, որոնց մեջ «կհայտնվի» նաև 8 թիվը: Համառոտության համար, այդ պրոցեսը պատկերենք թվային շղթայի տեսքով.

$$1\to3\to7\to15\to31\to63\to127\to42\to85\to$$
$$\to171\to343\to114\to229\to76\to25\to8:$$

52. Ո՛չ: **Ցուցում:** Համոզվեք, որ յուրաքանչյուր քայլում կունենանք միայն 3-ի բազմապատիկ թվով արտահայտված լիտր ջուր: **53.** 2 աշակերտ:

54. 19 աշակերտ:

55. 4 աշակերտ:

56. 11:

57. 4-ը:

58. Հավասար են:

60. 10 %:

61. Փիլիսոփաները:

62. Քանի որ յուրաքանչյուր որսորդ ճաշակել է 1 բաժակ բրնձով ապուր, ուստի ստացվում է, որ առաջին որսորդն իր ունեցած երկու բաժակ բրնձից մեկը տվել է երրորդ որսորդին: Դրա փոխարեն նա պետք է ստանա բոլոր 5 փամփուշտները:

63. **Ցուցում:** Հարթության վրա դիտարկել 1 մ կողմով հավասարակողմ եռանկյան երեք գագաթները:

64. **Ցուցում:** Ընտրենք 6 մարդկանցից որևէ մեկին, անվանենք A: Դիցուք, A-ն ծանոթ է k մարդու: Դիտարկեք դեպքեր՝ $k=1$, $k=2$, $k\geq 3$:

66. Ո՛չ:

67. 5 **Ցուցում:** Համոզվեք, որ ոչ մի հաղթանակ չունեցած թիմերի քանակը չի կարող 1-ից մեծ լինել: Նշանակում է՝ թիմերից միայն մեկն է, որ իր բոլոր հանդիպումներին պարտվել է:

68. 7 կամ 14:

69. **Ցուցում:** 9 մետաղադրամները բաժանեք 3-ական մետաղադրամներով կազմված երեք կույտի:

70. Առաջին կշռումով որոշվում է, թե որ կույտում է կեղծ մետաղադրամը: Այնուհետև, կեղծ մետաղադրամը պարունակող կույտը բաժանել 9-ական մետաղադրամ պարունակող երեք կույտերի: Երկրորդ կշռումով կորոշվի, թե որ 9-յակում է կեղծ մետաղադրամը: Այնուհետև, կվարվենք այնպես, ինչպես նախորդ խնդիրը լուծելիս:

71. **Ցուցում:** Սկզբում մետաղադրամները բաժանել 25, 25, 26-ական մետաղադրամներով երեք կույտի:

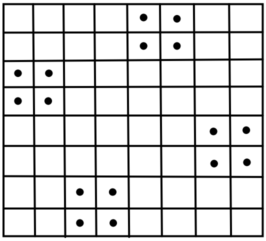
72. **Ցուցում**: Մետաղադրամները բաժանել երեք կույտի՝ 27, 27 և 25:

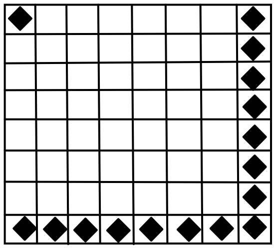
73. **Ցուցում**: Կշեռքի վրա դնել՝ 1-ին կույտից 1 մետաղադրամ, 2-րդ կույտից 2 մետաղադրամ, 3-րդ կույտից՝ 3 մետաղադրամ, և այդպես շարունակ, 99-րդ կույտից՝ 99 մետաղադրամ, 100-րդ կույտից 100 մետաղադրամ:

74. **1-ին կշռում:** 1, 2, 3 պիտակներով կշռաքարերը դնենք մի նժարի վրա, իսկ 6 պիտակով կշռաքարը՝ մյուս նժարի վրա: Եթե կշեռքը հավասարակշռվի, ապա պարզ կդառնա, որ 6 պիտակով կշռաքարը, իրոք, 6 գ է, իսկ 1, 2, 3 պիտակներով կշռաքարերից մեկը 1 գ է, մյուսը 2 գ, երրորդը՝ 3 գ (բայց հայտնի չէ, թե ո՞ր պիտակովն է 1 գ, ո՞րը՝ 2 գ, ո՞րը՝ 3 գ): Այդ ստուգելու համար անհրաժեշտ կլինի երկրորդ կշռում: **2-րդ կշռում:** 1 և 6 գրություններով կշռաքարերը դնենք մի նժարին, 3 և 5 գրություններով կշռաքարերը՝ մյուս նժարին: Եթե երկրորդ նժարը ներքև իջնի, ուստի բոլոր պիտակները ճիշտ են:

75. **1-ին կշռում.** փորձագետը ձախ նժարին դնում է 1-ին մետաղադրամը, իսկ աջ նժարին՝ 8-րդ մետաղադրամը: Քանի որ աջ նժարը ներքև է իջնում, դատարանը համոզվում է, որ 1-ին մետաղադրամը կեղծ է, իսկ 8-րդը իսկական: **2-րդ կշռում**. ձախ նժարին դնում է 1, 9, 10 համարներով մետաղադրամները, իսկ աջ նժարին՝ 8, 2, 3 համարներ ունեցողները: Ձախ նժարը ներքև է իջնում: Դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ 9 և 10 համարներով մետաղադրամներն իսկական են, իսկ 2 և 3 համարներով մետաղադրամները՝ կեղծ: **3-րդ կշռում**. վերջապես, ձախ նժարին դրվում է 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 համարներով մետաղադրամները, իսկ աջ նժարին՝ մնացածները: Աջ նժարը ներքև է իջնում և դատարանը տեսնում է, որ այդ նժարի վրա ավելի շատ են իսկական մետաղադրամները, քան ձախ նժարի վրա: Դրա հետ մեկտեղ, ձախ նժարի վրա կեղծ մետաղադրամներն ավելի շատ են, քան աջ նժարի վրա: Դա էլ դատարանին ապացուցում է, որ 4, 5, 6, 7 համարներով մետաղադրամները կեղծ են, իսկ 11, 12, 13, 14 համարներով մետաղադրամները՝ իսկական:

76. Շախմատի տախտակի 8 հորիզոնական (ուղղահայաց) շերտերից և ոչ մեկում չի կարելի երեք մեխ խփել. հակառակ դեպքում այդպիսի մեխերի թողած հետքերը կգտնվեն մեկ ուղղի վրա: Դա նշանակում է, որ ամենաշատը կարելի է խփել $8\times2=16$ մեխ: Ցույց տանք, որ խնդրի պայմաններին բավարարող 16 մեխ խփելու հնարավորություն կա: Այն պատկերված է նկար 14-ում:





Նկ . 14 Նկ . 15

77. Այո՛, դժվար չէ համոզվել, որ շախմատի տախտակի բոլոր 32 սպիտակ վանդակներին դնելով ձիեր, կունենանք այնպիսի իրավիճակ, որը բավարարում է խնդրի պայմանին:

78. Այդպիսի դասավորություն պատկերված է 15-րդ նկարում:

79. 17 րոպե:

80. $\frac{6}{7}$ լիտր, $\frac{5}{7}$ լիտր, $\frac{4}{7}$ լիտր, $\frac{3}{7}$ լիտր, $\frac{2}{7}$ լիտր, $\frac{1}{7}$ լիտր, 0 լիտր:

81. A -ն՝ Սարանիստում, B -ն և C -ն՝ Հարթանիստում:

82. Կարելի է, օրինակ, այսպիսի հարցեր տալ. 1) 1-ին գումարած 1 հավասա՞ր է 2-ի, 2) 2-ին գումարած 1 հավասա՞ր է 3-ի, 3) Սա A քաղա՞քն է, 4) Սա B քաղա՞քն է:

83. 39:

84. 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 516 գրամանոց կշռաքարեր:

85. Դիցուք, խաղացողը A, B, C ձիերի համար դրել է, համապատասխանաբար, a, b և c դոլլար: Եթե A-ն առաջինն է հատել վերջնագիծը, ապա նա «շահում է» $a-b-c$ դոլլար, B -ն է առաջինը հատում, ապա՝ $2b-a-c$ դոլլար, իսկ եթե C -ն է առաջինը հատում վերջնագիծը, ապա՝ $6c-a-b$ դոլլար: Հավասարեցնելով հնարավոր «շահումները», կստանանք՝

$$2a-(a+b+c)=3b-(a+b+c)=7c-(a+b+c),$$

այսինքն՝ $2a=3b=7c$: Բացի այդ, $a+b+c=205$: Վերջին երկու հավասարություններից գտնում ենք՝ $a=105$, $b=70$, $c=30$: Այդպես բաշխելով խաղադրույքները, խաղացո-ղը ստանում է $105-30-70=5$

դոլլար մաքուր եկամուտ, անկախ այն բանից, թե որ ձին առաջինը կլինի:

88. Ակնհայտ է, որ հարցման ենթակա 39 մարդկանցից յուրաքանչյուրն արել է ոչ ավելի, քան 38 ձեռքսեղմում, դրա համար էլ նրանց պատասխանած թվերն են՝ 0, 1, 2, …, 37, 38: 38 ձեռքսեղմում կատարած պատվիրակը չի բարևել միայն իր երկրի մյուս ներկայացուցչին: Դա նշանակում է, որ վերջինս ոչ մեկին չի ողջունել, այսինքն՝ նրա ձեռքսեղմումների քանակը 0 է: Հետևաբար, այն ներկայացուցիչը, որը կատարել է 38 ձեռքսեղմում, նրա երկրի մյուս ներկայացուցիչը կատարել է 0 ձեռքսեղմում: Միևնույն երկրի այդ երկու ներկայացուցիչներին “հեռացնենք” և դիտարկենք մնացած 19 երկրների 37 ներկայացուցիչներին վերագրված 1, 2, 3, …, 37 թվերը: Այստեղ ևս դժվար չէ համոզվել, որ առավելագույն և նվազագույն (37 և 1) քանակներով ձեռքսեղմումներ ունեցող ներկայացուցիչները միևնույն երկրից են: Այդ զույգին ևս հեռացնելով, կունենանք 2,3,4…36 ձեռքսեղմում ունեցող 35 ներկայացուցիչներ: Համանման ձևով համոզվում ենք, որ 2 և 36 (նվազագույն և առավելագույն) ձեռքսեղմումներ ունեցող պատվիրակները միևնույն երկրից են: Շարունակելով այդ պրոցեսը՝ 18 քայլից հետո կունենանք 18, 19, 20 ձեռքսեղմումներ ունեցող երեք պատվիրակ, որոնցից 18 և 20 ձեռքսեղմում ունեցող ներկայացուցիչները միևնույն երկրից են: Ի վերջո, կմնա 19 ձեռքսեղմում ունեցող մեկ ներկայացուցիչ, որը հարցում կատարողի հետ նույն M երկրի պատվիրակն է (վարչապետը): Այսպիսով, M երկրի վարչապետը կատարել է 19 ձեռքսեղմում:

89. Արամն ու Աշոտը ճաշակել են տորթի հավասար չափով կտորներ:

91. Իմաստունները երկար խորհելուց և միմյանց հետ խորհրդակցելուց հետո մշակում են այսպիսի խելամիտ ստրատեգիա, որի շնորհիվ նրանցից առնվազն 29-ը (չի բացառվում՝ բոլորը) զերծ կմնան պատժից: Նկարագրենք այն ստրատեգիան, որը պետք է պահպանեն իմաստունները: Շարքի վերջին մարդը նայում է առաջ, հաշվում սև գլխարկները և ասում՝ «սև¦, եթե նրանց քանակը զույգ է, «սպիտակ¦, եթե նրանք կենտ թվով են: Եթե նրա ասածը պատահականորեն ճիշտ լինի, նա ազատվում է պատժից, հակառակ դեպքում, ի լուր բոլորի, նրա անունը գրանցվում է պատժվողների ցուցակում:

Ենթադրենք, թե նա ճիշտ է բարձրաձայնել, որ իր գլխին սև գլխարկ է: Դրանով իսկ մնացածները՝ 29-րդ, 28-րդ, … , 2-րդ, 1-ին իմաստուն-ները ստանում են շատ կարևոր տեղեկություն: Այսպես, 29-րդը հաշվում է իրենից առաջ կանգնած սև գլխարկները և, եթե այդ թիվը զույգությամբ փոխվեց (այսինքն՝ կենտ է), ապա նրա գլխին սև գլխարկ է և նա ասում է՝ «սև» (հակառակ դեպքում ասում է «սպիտակ»): Այնուհետև, 28-րդն է հաշվում իրենից առաջ կանգնած իմաստունների սև գլխարկները և իմանալով նրանց քանակի զույ-գությունն առանց իրեն և իրենով, միարժեքորեն որոշում է իր գլխին դրված գլխարկի գույնը և այդպես շարունակ: Այսպիսով, 1-ից մինչև 29-րդ իմաստունները զերծ են մնում պատժից:

§ 6. Երկրաչափական խնդիրներ

24. 10: **37.** $12\sqrt{2}r$: **38.** $\sqrt{3}$: **40.** 10/3: **49.** 2,5: **51.** C անկյան կիսորդի հիմքը: **52.** 90°: **53.** 90°,90°,120°,60°:

§ 7. Տարաբնույթ խնդիրներ

1. 12,5: **2.** 77: **3.** 890: **4.** 417: **5.** 103: **6.** 285714: **8.** 10 դմ: **9.** 500: **11.** 32: **12.** 1 կգ: **13**. Կիրակի: **14.** 44 անգամ: **15.** 125 %-ը: **16.** 37,5 %-ը: **17.** Ոչ: **18.** Բաքկենը:

19. $\frac{24}{25}$: **20.** $\frac{9}{100}$: **21.** $\frac{10}{21}$: **22.** $\frac{36}{37}$:

24. բ) Քանի որ

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{10}=1,$$

ուստի կարելի է ընտրել $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{56}$; $\frac{1}{72}$; $\frac{1}{90}$; $\frac{1}{10}$ կոտո-րակները:

25. ա) Այո, բ) Ոչ: **26.** Առաջին թիվը փոքր է երկրորդից:
27. Առաջին թիվը մեծ է երկրորդից: **28.** Առաջին թիվը փոքր է երկրորդից:

29. Երկրորդը: **30.** Առաջինը: **31.** Առաջինը: **32.** Առաջինը:

33. Երկրորդը: **34.** ա) $\dfrac{n}{n+1}$ բ) $\dfrac{n}{2n+1}$: **36.** ա) Առաջինը, բ) երկրորդը:

38. Այո:

39. ա) $k \in \{-7;-5;-4;-2;-1;1\}$, բ) $k \in \{-24;4;6;34\}$, գ) $k \in \{-6,0;1;7\}$:

41. ա) $\dfrac{6}{11}$, բ) $\dfrac{n+1}{2n}$: **44.** Երգողները: **45.** Անգլերեն:

46. Առաջինը՝ 132 դետալ, երկրորդը՝ 189 դետալ:

47. Բոլորը ներդրեցին հավասարապես: **48.** 1:

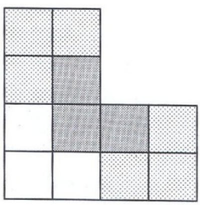
51. ա) 1-ը, բ) հավասար: **52.** 81: **53.** ա) 18, բ) 72: **54.** 256: **55.** 9990: **56.** 16:

57. 28: **58.** 45: **59.** 190: **60.** 28: **61.** 15: **62.** ա) 15, բ) 15: **64.** բ) Ոչ:

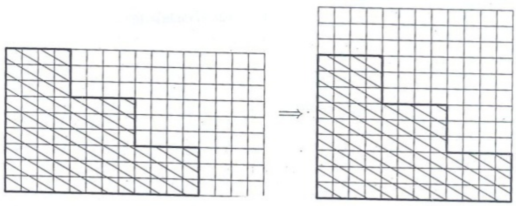
66. $21\dfrac{9}{11}$: **67.** 1 ժամ $5\dfrac{5}{11}$ րոպե հետո:

68. 167,5 աստիճան: **69.** 110^0: **70.** 13: **71.** 11: **72.** Տես նկ. 17:

73. Տես նկ. 18:



նկ. 17



նկ. 18

74. 30^0, 60^0, 90^0 անկյուններով եռանկյուն: Բավական է տանել ուղիղ անկյան գագաթից ելնող միջնագիծը: **76.** Բութանկյուն: **77.** 5,5: **78.** 45^0:

79. **Ցուցում:** Կարելի է կտրատել, օրինակ, եռանկյան որևէ միջին գծով և այդ միջին գծին ուղղահայաց բարձրության այն մասով, որն ընկած է եռանկյան գագաթի և այդ միջին գծի միջև:

81. Օրինակ, եթե վերցնենք $a=2$, $b=10$, $c=4$, $d=5$, ապա նման իրավիճակ չի լինի:

83. Ցուցում: Առաջին ընտրած ցանկացած k թվի ($k = 1, 2, ..., 8, 9$) դեպքում երկրորդն ընտրում է $10-k$ թիվը, դրանով իսկ վերջինիս ստացած գումարը միշտ կլինի 10-ի բազմապատիկ:
84. ա) Սկսողը, բ) սկսողը, գ) երկրորդը:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Նախաբան 3

§ 1. ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐ: ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ 4

§ 2. ԲԱՂԴԱՏՈՒՄՆԵՐ: ՖԵՐՄԱՅԻ ՓՈՔՐ ԹԵՈՐԵՄԸ 22

§ 3. ՀԱՏԸՆՏՐԱՆՔ ԵՎ ՄԻԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԱՐՐԵՐ 31

§ 3. ՏԵՔՍՏԱՅԻՆ ՀԵՏԱՔՐՔՐԱՇԱՐԺ ԽՆԴԻՐՆԵՐ 36

§ 4. ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ 44

§ 5. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ 61

§ 6. ՏԱՐԱԲՆՈՒՅԹ ԽՆԴԻՐՆԵՐ 68

Պատասխաններ և ցուցումներ 81

Կորյուն Գարեգինի Առաքելյան
Հայկազն Սարիբեկի Նավասարդյան
Արման Հովհաննեսի Սարգսյան

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԽՈՐԱՑՎԱԾ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

8-րդ դասարան

Խմբագիր՝ **Կորյուն Առաքելյան**
Կազմի ձևավորումը՝ **Գևորգ Շառոյանի**
Համակարգչային ձևավորումը՝ **Հրայր Շառոյանի**
Համակարգչային շարվածքը՝ **Հասմիկ Առաքելյանի**

Ստորագրված է տպագրության 15.08.2016:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ:
Տպագրությունը՝ օֆսեթ: 8 տպ. մամուլ:
Տպաքանակը՝ 200 օրինակ:

«ԳԵՎՈՐԳ - ՀՐԱՅՐ» ՍՊԸ

ԼՈՒՍԱԿՆ

Հրատարակչություն
Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6:
Հեռ.՝ 52.79.74
Էլ. փոստ lusakn@rambler.ru