3-я Олимпиада Мегаполисов

День 2. Условия

Задача 4. Пусть k — натуральное число, и $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = 4k$ — все положительные делители числа $4k$. Докажите, что найдется $i \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $d_i - d_{i-1} = 2$. *(Ivan Mitrofanov)*

Задача 5. Аня и Максим играют в игру на клетчатой доске 100×100.

Сначала Аня заполняет все клетки доски целыми числами от 1 до 10 000 так, что каждое число встречается по одному разу.

Затем Максим ставит фишку на одну из клеток самого левого столбца по своему выбору. Далее он за несколько ходов передвигает фишку в самый правый столбец. За один ход он может передвинуть фишку из клетки в любую соседнюю с ней по вершине или стороне. За каждую посещенную клетку (включая изначальную) Максим платит Ане такое число монет, которое написано на этой клетке.

Максим хочет заплатить как можно меньше, Аня же хочет получить как можно больше. Сколько монет заплатит Максим, если каждый из них будет действовать наилучшим для себя образом? *(Lev Shabanov)*

Задача 6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Пусть P — точка на меньшей дуге DE окружности такая, что $\angle APE = \angle DPB$. Отрезки AP и BP пересекают отрезок DE в точках K и L соответственно. Докажите, что $2KL = DE$.

(Dušan Djukić)