3-я Олимпиада Мегаполисов

День 1. Условия

Задача 1. Решите систему уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1) = xyz - 1\,, \\ (x-2)(y-2)(z-2) = xyz - 2\,. \end{cases}$$

(Vladimir Bragin)

Задача 2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный AC. Известно, что прямые BP и DQ пересекаются в точке X, а прямые BQ и DP — в точке Y. Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC. *(Géza Kós)*

Задача 3. Пусть k — такое натуральное число, что $p = 8k+5$ — простое число. Целые числа $r_1, r_2, \ldots, r_{2k+1}$ таковы, что числа $0, r_1^4, r_2^4, \ldots, r_{2k+1}^4$ дают попарно различные остатки при делении на p. Докажите, что произведение

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2k+1} (r_i^4 + r_j^4)$$

сравнимо с $(-1)^{k(k+1)/2}$ по модулю p.

(Два целых числа сравнимы по модулю p, если их разность делится на p.)

(Fedor Petrov)