

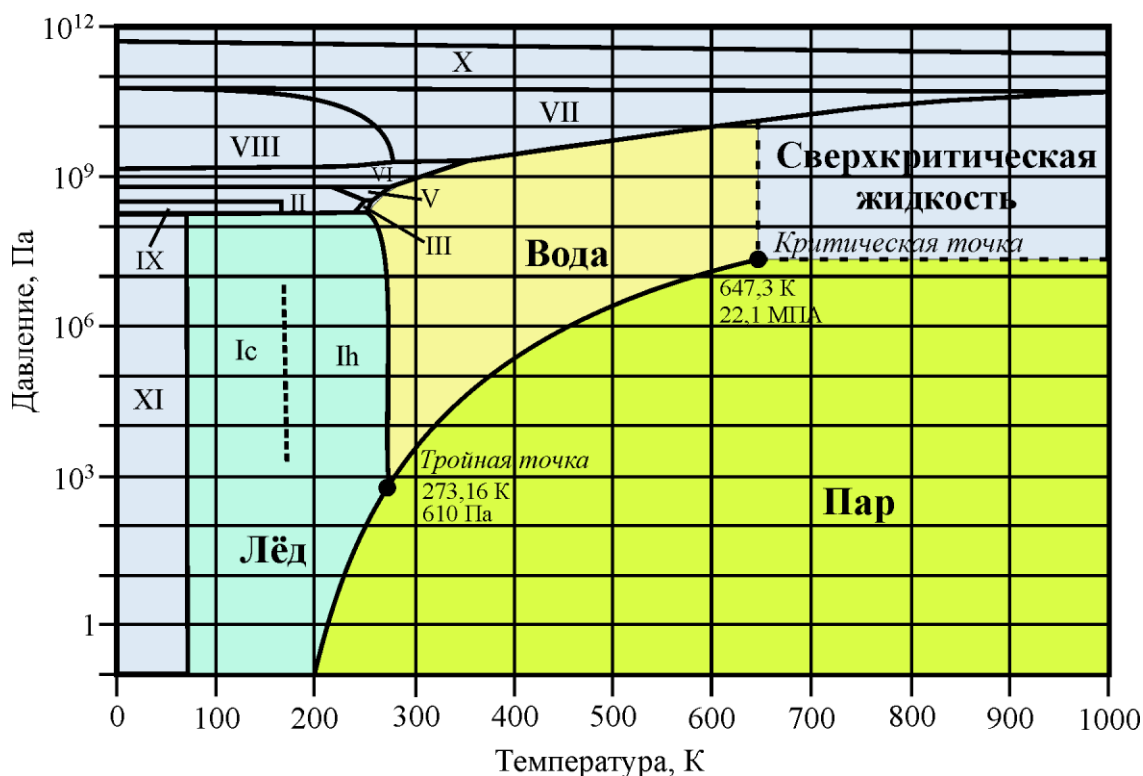
Задача 3: «В далекой-далекой галактике...»

В далекой-далекой галактике вокруг звезды X по почти идеальной круговой орбите вращается планета-океан. Ось собственного вращения планеты перпендикулярна плоскости орбиты, а угловая скорость этого вращения равна угловой скорости вращения планеты вокруг звезды (оба вращения происходят в одном направлении). Сама планета в значительной мере состоит из воды, однако внутри нее есть твердое ядро, в котором происходят процессы ядерного распада и гравитационной дифференцировки недр, порождающие дополнительный поток теплоты, идущий изнутри планеты. При этом вся поверхность планеты снаружи покрыта льдом. Ледяная поверхность шероховатая и загрязненная космической пылью, поэтому на дневной стороне она прогревается достаточно быстро, и при этом излучение в космос идет практически только с поверхности планеты.

Данные о системе X и не только о ней

(могут быть использованы в любой части работы):

- радиус звезды X равен $R_X = 7 \cdot 10^8$ м;
- радиус орбиты планеты-океана $r_o = 7 \cdot 10^{11}$ м;
- ускорение свободного падения на поверхности планеты-океана $g = 1$ м/с²;
- максимальная температура на экваторе дневной стороны планеты-океана $T_2 = 100$ К, а температура на полюсе $T_1 = 50$ К;
- плотность воды $\rho_0 \approx 1$ г/см³, плотность льда $\rho \approx 0,9$ г/см³;
- удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 340$ Дж/г, удельная теплота парообразования воды $L \approx 2250$ Дж/г;
- фазовая диаграмма воды представлена ниже:



- зависимость коэффициента теплопроводности льда χ от абсолютной температуры T в интересующем нас диапазоне температур с точностью не хуже 5% описывается интерполяционной формулой $\chi(T) \approx 5,40 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}) \cdot \left[1 - \frac{T}{465 \text{ К}}\right]$;
- постоянная Стефана-Больцмана $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$.
- максимум спектральной плотности излучения Солнца (то есть отношения мощности излучения ΔP , приходящейся на заданный малый интервал длин волн, к величине этого интервала $\Delta \lambda$) соответствует длине волны $\lambda_S \approx 480$ нм, а температура большей части поверхности фотосферы Солнца близка к $T_S \approx 6000$ К.

Часть I: тепловой баланс и ледяной покров

1.1. Найдите плотность q_0 потока теплоты, идущего наружу из недр планеты-океана. Выразите q_0 через величины, заданные в условии задачи (получите формулу) и подсчитайте численное значение с точностью не хуже 5%. Ответ выразите в Вт/м².

1.2. Найдите толщину H_1 ледяного покрова на полюсе. Выразите H_1 через величины, заданные в условии задачи (получите формулу) и подсчитайте численное значение с точностью не хуже 10%. Ответ выразите в метрах.

1.3. Оцените толщину H_2 ледяного покрова на экваторе с дневной стороны планеты-океана в зоне максимальной температуры. Выразите H_2 через величины, заданные в условии задачи (получите формулу) и подсчитайте численное значение. Ответ выразите в метрах.

1.4. Определите температуру T_X фотосферы звезды. Выразите T_X через величины, заданные в условии задачи (получите формулу) и подсчитайте численное значение. Ответ выразите в градусах Кельвина.

1.5. Получите зависимость максимальной дневной температуры T поверхности планеты от широты θ (выведите формулу).

1.6. Определите длину волны Λ_X , на которую приходится максимум спектральной плотности излучения звезды X. Ответ дайте в нм.

Часть II: полынья и кратер

Пусть на экваторе в области, где температура максимальна, на участке поверхности достаточно большой площади (размеры этого участка порядка толщины льда, но намного меньше радиуса планеты) очень быстро и «бесследно» исчез весь слой льда, то есть образовалась полынья.

2.1. Оцените время τ подъема воды в полынье до нового равновесного уровня (время отсчитывается от момента исчезновения льда). Выразите τ через величины, заданные в условии задачи, и через ранее найденные величины (получите формулу) и подсчитайте численное значение. Ответ дайте в секундах.

2.2. Оцените, какова будет толщина h_0 слоя льда в полынье сразу после смерзания ледяного слоя на ее поверхности. Выразите h_0 через величины, заданные в условии задачи (получите формулу) и подсчитайте численное значение. Ответ дайте в метрах.

2.3. Оцените глубину h_c «кратера», который останется на поверхности льда в том месте, где была полынья, через достаточно большое время. Ответ дайте в метрах.

Считайте, что испарение и замерзание воды происходит непосредственно в процессе подъема ее уровня, но окончательное смерзание ледяного слоя на поверхности воды происходит после того, как она почти остановилась на подходе к ее новому уровню.

Часть III: замерзание тоннеля

Рассмотрим процессы, которые будут происходить после образования в полынье начальной корки льда. Будем считать, что температура поверхности этой корки достаточно быстро сравнивается с температурой на поверхности планеты. Ясно, что на нижней кромке ледяного слоя будет происходить замораживание воды, и толщина слоя будет продолжать расти.

3.1. Оцените, за какое время t_1 толщина слоя возрастет в два раза по сравнению с начальной толщиной h_0 ? Выразите t_1 через величины, заданные в условии задачи, и через ранее найденные величины (получите формулу) и подсчитайте численное значение. Ответ дайте в земных днях.

3.2. Оцените возраст t_2 полыньи, толщина льда в которой $h = 100$ м. Выразите t_2 через величины, заданные в условии задачи, и через ранее найденные величины (получите формулу) и подсчитайте численное значение. Ответ дайте в земных годах.

3.3. Оцените возраст t_3 полыньи, нижняя кромка льда в которой сравнялась с нижней кромкой окружающего льда. Выразите t_3 через величины, заданные в условии задачи, и через ранее найденные величины (получите формулу) и подсчитайте численное значение. Ответ дайте в земных годах.

Возможное решение

Часть I

В первую очередь отметим, что при заданных угловых скоростях вращений планеты (вокруг звезды и вокруг своей оси) планета всегда будет обращена к звезде одной стороной. К тому же сама по себе угловая скорость будет невелика (то есть центробежные эффекты будут оказывать незначительное влияние на распределение масс в планете). В таких условиях на планете установится некое почти неизменное распределение температур и фаз веществ. Поэтому и толщина ледяного покрова в каждом месте на поверхности будет практически неизменной.

Предположим, что она везде существенно меньше радиуса планеты (указание на это содержится во второй части задачи). Из фазовой диаграммы следует, что на границе раздела лед-вода температура примерно равна температуре тройной точки воды $T_{in} \approx 273$ К (поскольку температура плавления льда в очень широком диапазоне давлений от $\approx 10^3$ Па до $\approx 5 \cdot 10^7$ Па практически не изменяется). Тогда величина радиального градиента температуры в ледяном покрове намного больше, чем вдоль поверхности (перепад температур между наиболее сильно нагретой точкой экватора и полюсом $T_2 - T_1 = 50$ К более чем в три раза меньше, чем $T_{in} - T_2 = 173$ К, а расстояние между экватором и полюсом намного больше толщины льда). Это означает, что плотность потока теплоты вдоль поверхности в приповерхностном слое льда намного меньше, чем плотность потока теплоты в радиальном направлении. Поэтому потоком теплоты вдоль поверхности можно пренебречь.

Запишем условие теплового баланса для небольшого объема льда, находящегося на дневной стороне поверхности планеты на широте θ . Идущий из недр планеты поток теплоты (будем условно называть его «геотермальным»), который необходимо найти, и поток энергии, поступающей от звезды (последний зависит от угла падения излучения на поверхность планеты, то есть от «планетоцентрической» широты местности) в сумме должны быть равны потоку собственного излучения поверхности планеты:

$$q_0 + \sigma T_X^4 \cos \theta \frac{R_X^2}{r_0^2} = \sigma T^4$$

(здесь использован закон Стефана-Больцмана для излучательной способности фотосферы звезды и поверхности планеты, T – температура на поверхности рассматриваемого объема льда).

Отсюда вытекают следующие выводы.

1.1. На полюсе ($\theta = \pi/2$) влияние излучения звезды нулевое, а потому вся теплота, излучаемая планетой на полюсе – это и есть искомый геотермальный поток:

$$q_0 = \sigma T_1^4 \approx 0,35 \text{ Вт/м}^2.$$

Точность, с которой указаны необходимые данные, заведомо лучше 5%, а пренебрежение потоками теплоты вдоль поверхности вносит еще меньшие погрешности. Поэтому точность результата лучше требуемой.

1.2. Толщина ледяного покрова на полюсе находится следующим образом. Геотермальный поток через слой льда малой толщины dH одинаков для всех слоев и, согласно закону Фурье, равен по модулю:

$$q_0 = \chi(T) \frac{dT}{dH} \Rightarrow H_1 = \frac{1}{q_0} \int_{T_1}^{T_{in}} \chi(T) dT.$$

Подставляя в эту формулу заданный закон $\chi(T) \approx A \cdot [1 - \beta T]$, где $A = 5,40 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\beta = (1/465) \text{ К}^{-1}$, находим:

$$H_1 = \frac{A}{\sigma T_1^4} (T_{in} - T_1) \left(1 - \frac{\beta}{2} (T_{in} + T_1) \right).$$

Вычисления дают $H_1 \approx 2250$ м.

Используя информацию о веществе, из которого состоит планета, и об ускорении свободного падения на ее поверхности можно оценить радиус планеты, который оказывается порядка 2-3 тысяч км. Таким образом, сделанное предположение о малости толщины ледяного покрова по сравнению с радиусом планеты оправдывается, и учет потоков теплоты

вдоль поверхности вносит поправки менее 0,1%! Значит, этой поправкой можно пренебрегать, и, с учетом точности интерполяции $\chi(T)$, точность результатов этого пункта явно не хуже 10%.

1.3. Толщина ледяного покрова на экваторе, в зоне максимальной дневной температуры, также находится по формуле, полученной в п. 1.2., в которой необходимо заменить T_1 на T_2 . Точность этого результата определить сложнее – нам неизвестна точность использования приближения абсолютно черного тела (неизвестна отражательная способность льда, есть только указания на то, что она невысокая). Вычисления дают $H_2 \approx 1600$ м. Слой льда такой толщины создает давление $\rho g H_2 \approx 1,5 \cdot 10^6$ Па, что подтверждает сделанное выше предположение о близости температуры на нижней кромке льда к 273 К.

1.4. Условие теплового баланс для участка льда на экваторе на дневной стороне планеты теперь можно записать в виде

$$\sigma T_X^4 \frac{R_X^2}{r_0^2} = \sigma(T_2^4 - T_1^4),$$

Откуда температура фотосферы звезды $T_X = \sqrt[4]{\frac{r_0^2}{R_X^2} (T_2^4 - T_1^4)} \approx 3100$ К.

1.5. Значит, зависимость максимальной дневной температуры от широты можно описать формулой:

$$T(\theta) = \sqrt[4]{T_1^4 + (T_2^4 - T_1^4) \cos^2 \theta}.$$

1.6. Согласно закону смещения Вина, $\Lambda_{\max} \cdot T = \text{const}$, поэтому $\Lambda_X = \frac{T_S}{T_X} \cdot \Lambda_S \approx 929$ нм, то есть звезда X светит в основном в инфракрасном диапазоне.

Часть II

После быстрого исчезновения слоя льда, вода, во-первых, устремится вверх из-за давления соседних льдов. На поверхности поднимающейся воды установится почти нулевое давление, при этом температура сохранится примерно прежней – как мы установили в предыдущем пункте, примерно равной температуре T_{in} тройной точки воды. При этом если посмотреть на фазовую диаграмму воды, то станет понятно, что состояние приповерхностной воды будет соответствовать области диаграммы «Пар», то есть вода начнет интенсивно испаряться. Теплота испарения будет отбираться у нижележащей воды, которая в результате будет охлаждаться и замерзать. Из условия задачи известно, что процессы испарения и замерзания идут в одном темпе с процессом подъема воды, в самом конце которого на поверхности воды образуется сплошная ледяная «корка».

2.1. Давление над поверхностью воды быстро сравнивается с давлением насыщенного пара, но все равно остается намного меньше давления $p = \rho g H_2$, создаваемого толщей льда. Давление толщи льда будет уравновешено давлением столба воды в полынье только тогда, когда этот столб достигнет высоты $H_0 = \frac{\rho}{\rho_0} H_2 \approx 1440$ м. Вода устремляется в полынья снизу со всех направлений, и ее скорость «на подходе» к полынье существенно меньше скорости поднимающегося водяного столба. Поэтому скорость V подъема воды в полынье в тот момент, когда высота столба жидкости равна x , можно оценить, исходя из уравнения Бернулли: $\rho_0 g x + \frac{\rho_0 V^2}{2} \approx \rho g H_2$, откуда $V = \frac{dx}{dt} \approx \sqrt{2g(H_0 - x)}$. Следовательно, время подъема воды до высоты H_0 примерно равно $\tau \approx \int_0^{H_0} \frac{dx}{\sqrt{2g(H_0 - x)}} = \sqrt{\frac{2H_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\rho H_2}{g\rho_0}} \approx 54$ с.

2.2. Как видно из фазовой диаграммы, приповерхностный слой воды будет кипеть, а возможность образования льда при температуре воды T_{in} возникнет только на глубине, в которой давление воды будет соответствовать давлению в тройной точке воды $p_3 \approx 610$ Па. Соответствующая глубина равна $h_b = p_3 / (\rho_0 g) = 61$ см. При этом теплота, необходимая для испарения слоя воды толщиной h_b будет «забрана» из слоя нижележащей воды, которая за счет этого и превратится в слой приповерхностного льда толщиной h_0 . Таким образом, из уравнения теплового баланса получаем: $\rho_0 h_b L = \rho h_0 \lambda$. Отсюда $h_0 = \frac{L p_3}{\rho \lambda g} \approx 4,5$ м.

2.3. Ясно, что после начала замерзания воды в полынье глубина кратера установится и не будет изменяться. Поэтому глубина кратера $h_c \approx H_2 - H_0 = H_2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \approx 160$ м.

Часть III

Если слой льда в некотором месте тоньше, чем в окружающей области, то отток теплоты через тонкую «корку» при одной и той же разности температур будет существенно больше, и не будет скомпенсирован геотермальным притоком. Поэтому слой льда будет расти с течением времени t , причем поток теплоты отвердевания вместе с геотермальным потоком будет уходить из жидкости через лед наружу. Пусть толщина растущего слоя льда в некоторый момент времени t равна H . Тогда для малого промежутка времени dt :

$$\frac{1}{H} \int_{T_2}^{T_{in}} \chi(T) dT \cdot S dt = q_0 S dt + \lambda \rho S dH \Rightarrow \lambda \rho \frac{dH}{dt} = \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{H_2}\right) \int_{T_2}^{T_{in}} \chi(T) dT.$$

Обозначим $\int_{T_2}^{T_{in}} \chi(T) dT = q_0 H_2 \equiv B$ и проинтегрируем это уравнение:

$$t = \frac{\lambda \rho}{B} \int_{h_0}^{H(t)} \frac{H_2 H}{H_2 - H} dH.$$

3.1. На начальной стадии промерзания $H(t) \ll H_2$ (соответственно геотермальным поток на начальных стадиях пренебрежимо мал по сравнению с оттоком теплоты, и им можно пренебречь). В этом случае можно отбросить H в знаменателе подынтегрального выражения, и

$$t_1 \approx \frac{\lambda \rho}{B} \left(\frac{(2h_0)^2}{2} - \frac{h_0^2}{2} \right) = \frac{3\lambda \rho}{2B} h_0^2 = \frac{3\lambda \rho}{2q_0 H_2} h_0^2 \approx 1,66 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 192 \text{ земных дня.}$$

3.2. Для второго случая по-прежнему $H(t) \ll H_2$, и можно воспользоваться той же формулой:

$$t_2 \approx \frac{\lambda \rho}{q_0 H_2} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h_0^2}{2} \right) \approx 2,7 \cdot 10^9 \text{ с} \approx 87 \text{ земных лет.}$$

3.3. В третьем случае толщина слоя льда уже достаточно велика: $H(t_3) = H_0$, и для оценки можно считать, что $H_2 - H \ll H_2$. Тогда, поскольку большая часть времени тратится на «поздние» стадии замораживания, можно в числителе подынтегрального выражения положить $H \approx H_2$, и в результате:

$$t_3 \approx \frac{\lambda \rho H_2^2}{B} \int_0^{H_0} \frac{dH}{H_2 - H} \approx \frac{\lambda \rho H_2^2}{B} \ln \left(\frac{H_2}{H_2 - H_0} \right) = \frac{\lambda \rho H_2}{q_0} \ln \left(\frac{H_2}{H_2 - H_0} \right) \approx 3,2 \cdot 10^{12} \text{ с} \approx 102 \text{ тыс. земных лет.}$$

Примечание. Конечно, можно получить общую формулу без использования приближений, и в этом случае

$$t = \frac{\lambda \rho}{q_0} \left[H_2 \cdot \ln \left(\frac{H_2 - h_0}{H_2 - H(t)} \right) - H(t) + h_0 \right].$$

Однако существенное изменение результатов из-за этого произойдет только в третьем случае: получится

$$\begin{aligned} t_1 &\approx 1,67 * 10^7 \text{ с} \approx 193 \text{ земных дня,} \\ t_2 &\approx 2,85 * 10^9 \text{ с} \approx 90 \text{ земных лет,} \\ t_3 &\approx 1,96 * 10^{12} \text{ с} \approx 62 \text{ тыс. земных лет,} \end{aligned}$$

то есть уточненная оценка для времени t_3 отличается от более грубой первоначальной оценки почти в 2 раза.