Задача 2. «Нелинейное трио»

В данной задаче рассматриваются «нелинейные резисторы». Напряжение U на таком резисторе пропорционально квадрату силы текущего через резистор тока I (с соблюдением полярности): $U = \alpha I\,|I|$. Постоянный коэффициент α является характеристикой данного нелинейного резистора.

Часть I: нелинейность и постоянный ток.

Предположим, что у нас есть три одинаковых нелинейных резистора, характеризующихся коэффициентом α, три одинаковых источника постоянного напряжения с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, один обычный резистор, один диод и практически идеальный амперметр. Известно, что при подключении к одному источнику напряжения одного нелинейного резистора, так же как и при подключении к одному источнику обычного резистора через источник течет ток силой $I_0 = 1$ А. Из всех перечисленных выше элементов собрали цепь согласно схеме, изображенной на рис. 1. Нелинейный резистор условно изображается прямоугольником с «волной» внутри него.

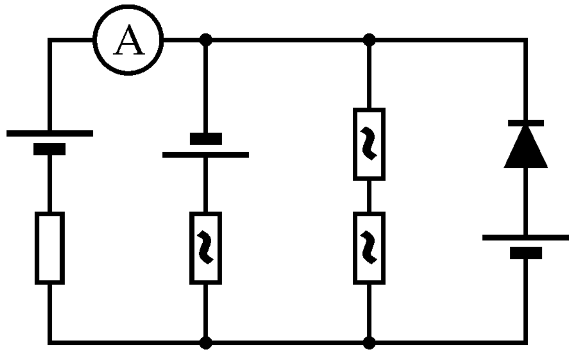

Рис. 1.

На рис. 2 показан участок вольт-амперной характеристики диода. Масштабные единицы по горизонтальной оси напряжений неизвестны, но известно, что сила тока через диод, равная I_0, достигается при напряжении, в 5 раз меньшем ЭДС каждого из источников.

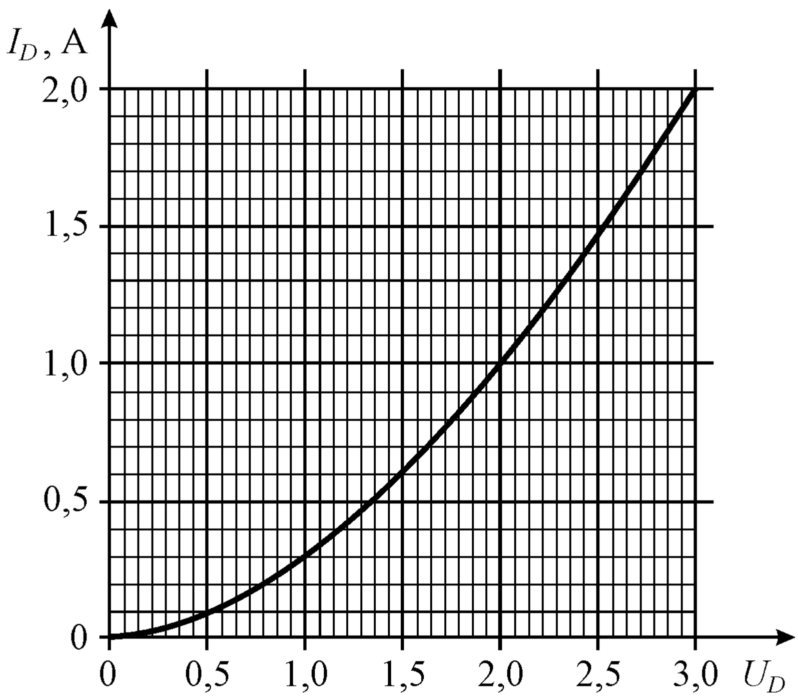

Рис. 2.

1.1. Запишите полную систему уравнений, определяющих токи во всех ветвях цепи, изображенных на схеме вертикально. В систему уравнений должно войти напряжение U на параллельных ветвях цепи, а также ЭДС ε источника напряжения, сопротивление R резистора и коэффициент α.

1.2. Найдите показания амперметра в цепи с точностью не хуже 10%. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало. Ответ выразите в Амперах, укажите доверительный интервал для полученного результата.

Часть II: нелинейность и разряд конденсатора.

Теперь подключим нелинейный резистор с другой характеристикой α к обкладкам заряженного конденсатора (см. рис. 3) с помощью соединительных проводов. Если соединительные провода сильно охладить, переведя их в сверхпроводящее состояние, то конденсатор полностью разрядится за время $t_0 = 0{,}02$ с. На свойства «нелинейного резистора» температура не влияет.

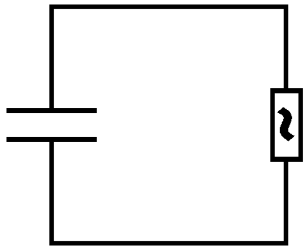

Рис. 3.

2.1. Выразите t_0 через емкость C конденсатора, его начальный заряд q_0 и характеристику α нелинейного резистора.

2.2. При разряде конденсатора только через эти соединительные провода при нормальной температуре заряд конденсатора убывает в e раз за время $\tau = 1$ мс (e – основание натурального логарифма). Как связано время τ с сопротивлением r проводов? Выведите и запишите формулу.

2.3. За какое время t ток в цепи конденсатора уменьшится от начального значения I_0 до некоторого значения I, если разрядка идет через нелинейный резистор и при нормальной температуре? Ответ приведите в виде формулы, в которую должны войти величины r, C, α, I и I_0.

2.4. Найдите время t_1, за которое заряд конденсатора уменьшится в n = 10 000 раз при разряде через провода и «нелинейный резистор» при нормальной температуре. Получите аналитический ответ, выразив t_1 через t_0, τ и n, а также дайте численный ответ с точностью не хуже 10% (в миллисекундах).

Часть III: нелинейность и затухающие колебания.

В следующем эксперименте в цепь разряда конденсатора включили нелинейный резистор с новой характеристикой α и сверхпроводящую катушку индуктивностью L (см. рис. 4). Соединительные провода тоже поддерживаются в сверхпроводящем состоянии. В этом случае в контуре возникают затухающие колебания, и, когда сила тока в контуре впервые после начала разряда конденсатора обращается в ноль, величина заряда конденсатора оказывается на 10% меньше первоначального.

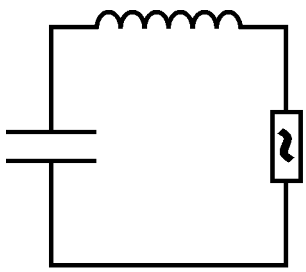

Рис. 4.

3.1. Пусть в некий момент времени до окончания первого полупериода колебаний заряд на конденсаторе уменьшился от начального значения q_0 до некоторого значения q. Какой будет сила тока в контуре к этому моменту времени? Ответ дайте в виде формулы, выразив его через α, L, C, q и q_0. Полезно иметь в виду, что в механике, когда нужно решать сложное нелинейное уравнение движения, пробуют привести его к виду, выражающему закон изменения энергии – часто это сильно упрощает решение.

3.2. Определите, какая часть первоначальной энергии конденсатора выделилась в виде теплоты в нелинейном резисторе до того момента, когда заряд конденсатора впервые стал равным нулю. Ответ дайте в процентах с точностью не хуже 10% от результата.

3.3. Какая часть первоначальной энергии конденсатора выделилась в виде теплоты в нелинейном резисторе к тому моменту, когда сила тока впервые после начала колебаний стала равна нулю? Ответ дайте в процентах.

3.4. Какая часть первоначальной энергии конденсатора выделилась в виде теплоты в нелинейном резисторе к тому моменту, когда заряд конденсатора во второй раз стал равным нулю? Ответ дайте в процентах с точностью не хуже 10% от результата.

НАПОМИНАНИЕ. Коэффициент пропорциональности α между напряжением и квадратом силы тока у нелинейных резисторов из разных частей задачи разный!

Возможное решение

Часть I

1.1. Введем обозначения: пусть U – общее напряжение на четырех параллельных ветвях схемы (между верхним и нижним проводниками), $I_{1,2,3,4}$ – токи в ветвях (нумерация слева направо, положительные направления токов выбраны так, как показано на рисунке 1а).

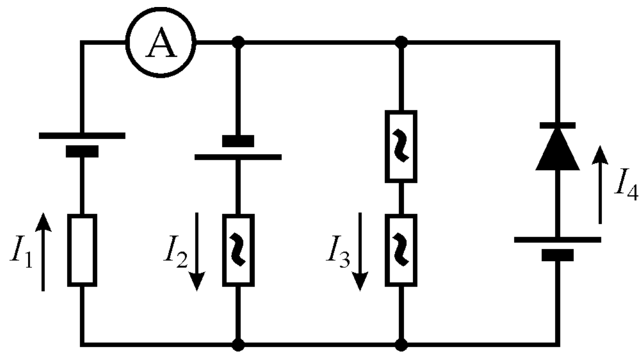

Рис. 1а.

Пусть R – сопротивление обычного резистора. Согласно условию, $R = \frac{\varepsilon}{I_0}$. Поскольку связь силы тока и напряжения для нелинейного резистора имеет вид $U = \alpha I\,|\,I\,|$, то с учетом заданной величины силы тока при подключении нелинейного резистора к источнику, находим, что $\alpha = \frac{\varepsilon}{I_0^2}$. Наконец, будем считать, что ВАХ диода описывается выражением $I_D = I_0 \cdot f(U_D/\varepsilon)$. Выразим токи в ветвях цепи через напряжение на них:

$$\begin{cases} I_1 = (\varepsilon - U)/R = I_0(1-x) \\ \alpha I_2^2 = U + \varepsilon \Rightarrow I_2 = I_0\sqrt{1+x} \\ 2\alpha I_3^2 = U \Rightarrow I_3 = I_0\sqrt{\dfrac{x}{2}} \\ I_4 = I_0 f(1-x) \end{cases},$$

где $x \equiv \frac{U}{\varepsilon}$ (правильность выбранных направлений токов проверяется в ходе решения). Кроме того, эти токи должны удовлетворять закону сохранения заряда, то есть $I_2 + I_3 = I_1 + I_4$. Таким образом, x находится из уравнения $\sqrt{1+x} + \sqrt{\frac{x}{2}} = 1 - x + f(1-x)$.

1.2. Согласно условию, сила тока через диод, равная I_0, достигается при напряжении, в 5 раз меньшем ε. Поэтому $f(0,2) = 1$, что позволяет «перенести» график ВАХ диода на один график с функциями, описывающими токи в других ветвях (см. рисунок 1б – красная линия), и решить это уравнение графически: явно построить график левой части уравнения, а график правой части построить суммированием вкладов при каждом x по оси значений силы тока.

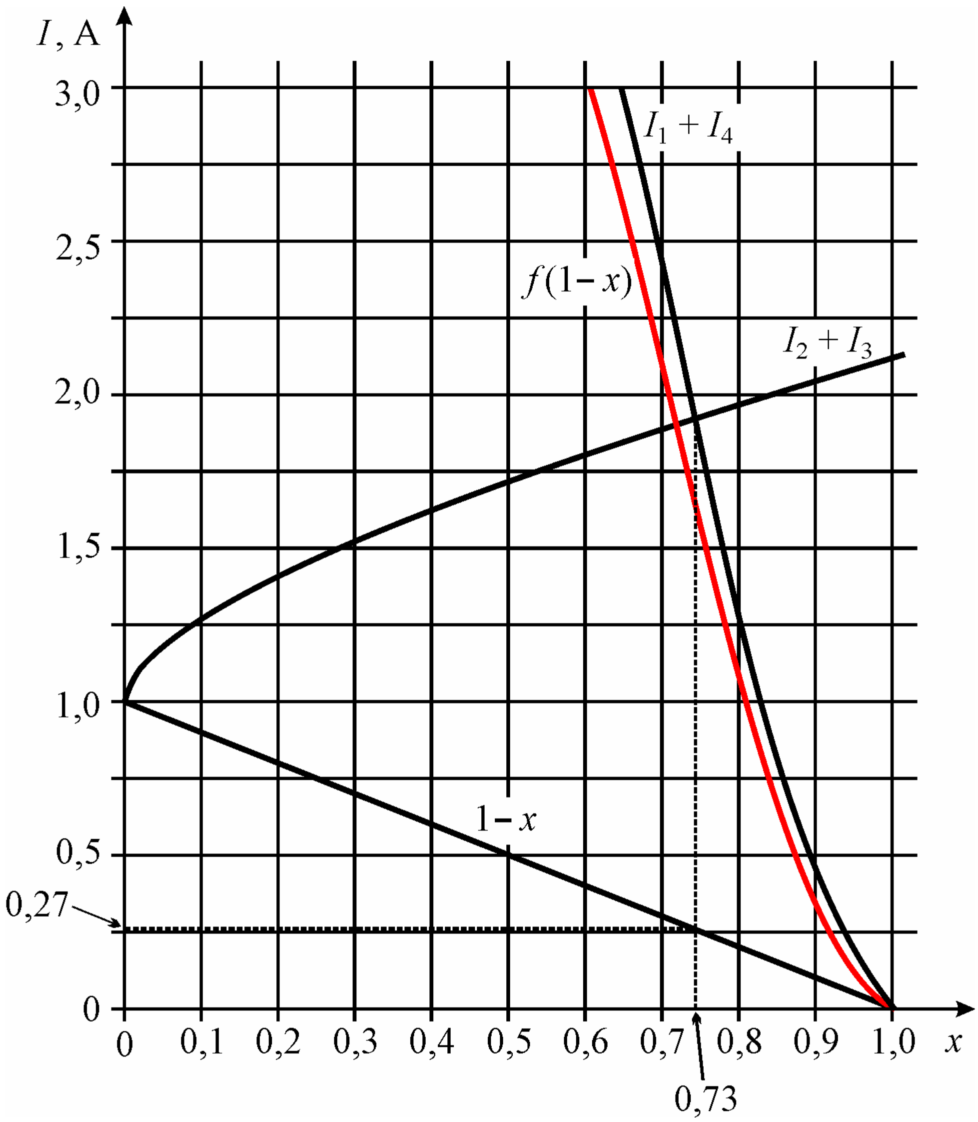

Рис. 1б.

Как видно, показания амперметра (соответствующие току через резистор), примерно соответствуют $I_{\text{A}} \approx (0,27 \pm 0,02)$ А. Указанная точность удовлетворяет требованию в условии и обеспечивается даже при «средней» аккуратности построения – реально ее можно сделать выше.

Примечание: Можно существенно уточнить графический результат, используя «алгебраический» подход. Даже при «грубом» построении графика заметно, что ответ находится в окрестности значения $x \approx 0,7$, а сила тока I_4, текущего через диод, будет вблизи значения 1,5 А. Также можно обратить внимание на то, что в окрестности этого значения силы тока угловой коэффициент ВАХ диода очень близок к 1. Тогда можно поступить следующим образом. Приближенно заменим ВАХ диода на втором графике в окрестности интересующей нас точки на прямую линию $f(1-x)|_{x\approx 0,7} \approx 9-10x$. Далее, полагая $x = 0,7+\delta$, и разлагая все выражения с точностью до линейных по малой величине δ слагаемых, получим: $\sqrt{1,7}+\sqrt{0,35}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1,7}}+\frac{1}{\sqrt{1,4}}\right)\delta \approx 2,3-11\delta$. Из этого уравнения следует, что $\delta \approx 0,0343$, то есть эта величина действительно мала, и вычислительные ошибки здесь составляют менее 3%. Ошибки «считывания графика» можно оценить в 2%, поэтому $I_{\text{A}} = I_0(1-x) \approx (0,266 \pm 0,011)$ А. Если сделать следующий шаг, то есть еще точнее определить значение первой производной на графике ВАХ диода уже непосредственно в точке, соответствующей силе тока в 1,6 А (это значение тока через диод в схеме при «грубом» подходе) и оценить вторые производные, то можно описать ВАХ диода квадратичным выражением. Тогда вычислительные ошибки становятся пренебрежимо малы по сравнению с ошибками считывания графика, и точность еще более улучшается: $I_A \approx (0,267 \pm 0,005)$ А. Однако, для правильного решения данной части задачи достаточно и точности графического метода, если все построения выполнены аккуратно. Тем не менее, для участников, улучшивших точность более чем в два раза по сравнению с требуемой, критерий устанавливает дополнительную премию. Следует отметить, что «почти точный» ответ, полученный с использованием аналитического уравнения, описывающего ВАХ диода (это уравнение, конечно же, известно авторам задачи), таков: $I_A \approx (0,26723 \pm 0,00001)$ А.

Часть II

2.1. Снова используем связь тока и напряжения для нелинейного резистора в виде $U = \alpha I\,|I|$. Для разряда через нелинейный резистор при сверхпроводящих проводах сила тока разряда связана с зарядом конденсатора соотношением $\frac{q}{C} = \alpha I^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{q}{\alpha C}}$ (ток разряда не меняет направления, и его мы считаем всегда положительным). Так как уравнение изменения заряда имеет вид $\frac{dq}{dt} = -I = -\sqrt{\frac{q}{\alpha C}}$ (заряд конденсатора уменьшается), то время полного разряда $t_0 = \sqrt{\alpha C}\int_0^{q_0}\frac{dq}{\sqrt{q}} = 2\sqrt{\alpha C q_0}$ (здесь q_0 – начальный заряд конденсатора).

2.2. Из условия ясно, что τ – постоянная времени разрядки конденсатора через провода при нормальной температуре, то есть $\tau = rC$.

2.3. Запишем теперь уравнение разряда через «нелинейный резистор» и провода с сопротивлением r.

Теперь $\frac{q}{C} = \alpha I^2 + rI \Rightarrow q = C(\alpha I^2 + rI)$, поэтому $\frac{dq}{dt} = -I = C(2\alpha I + r)\frac{dI}{dt}$. Значит, время снижения тока разрядки от I_0 до I равно $t = C\int_I^{I_0} dI\left(\frac{r}{I} + 2\alpha\right) = rC\ln\left(\frac{I_0}{I}\right) + 2\alpha C(I_0 - I)$.

2.4. Начальный ток определяется соотношением $\frac{q_0}{C} = \alpha I_0^2 + rI_0 \Rightarrow I_0 = \frac{r}{2\alpha}\left[\sqrt{\frac{4\alpha q_0}{Cr^2} + 1} - 1\right]$, а ток в тот момент, когда заряд уменьшается в n раз – $I = \frac{r}{2\alpha}\left[\sqrt{\frac{4\alpha q_0}{nCr^2} + 1} - 1\right]$. Нетрудно заметить, что $\frac{4\alpha q_0}{Cr^2} = \frac{4\alpha C q_0}{(Cr)^2} = \frac{t_0^2}{\tau^2}$, поэтому искомое время равно

$$t = \tau\ln\left(\frac{\sqrt{(t_0/\tau)^2 + 1} - 1}{\sqrt{(t_0/\tau\sqrt{n})^2 + 1} - 1}\right) + \sqrt{t_0^2 + \tau^2} - \sqrt{\frac{t_0^2}{n} + \tau^2}.$$

Можно провести вычисления по этому ответу (тогда получится, что $t \approx 25{,}873$ мс), но можно и упростить этот ответ. Для этого нужно учесть, что $\frac{t_0^2}{\tau^2} >> 1$, а $\frac{t_0^2}{n\tau^2} << 1$. Тогда получим, что $t \approx t_0 + \tau\ln\left(\frac{2n\tau}{e\,t_0}\right) \approx 25{,}9$ мс. Этот ответ явно попадает в заданную точность.

Комментарий: Результат интересен тем, что малое сопротивление (τ составляет от t_0 всего 5%!) изменяет результат почти на 30%. На самом деле сопротивление проводов заметно изменяет поведение $q(t)$ только при малых величинах заряда – область разряда в окрестности $q = 0$ сильно «растягивается» по времени.

Часть III

3.1. Составим уравнение колебаний в контуре. Будем по-прежнему считать ток разряда конденсатора $I = -\dfrac{dq}{dt} > 0$ (то есть пока что ограничим решение одним «полупериодом» колебаний): $\dfrac{q}{C} = \alpha I^2 + L\dfrac{dI}{dt} \Rightarrow \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{\alpha}{L}I^2 = \dfrac{q}{LC}$. Для анализа изменения заряда и энергии катушки и конденсатора в ситуации, когда не нужно получать зависимости этих физических величин от времени, достаточно связать заряд и силу тока друг с другом. Если вспомнить, как в аналогичной ситуации в механике при выводе закона изменения кинетической энергии используют преобразование $m\dfrac{dV}{dt} = F(x,V) \;\Rightarrow\; m\dfrac{VdV}{Vdt} = F(x,V) \;\Rightarrow\; \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{V^2}{2}\right) = \dfrac{F(x,V)}{m}$, то можно по аналогии преобразовать выражение для производной следующим образом: $\dfrac{dI}{dt} = I\dfrac{dI}{Idt} = -I\dfrac{dI}{dq} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d(I^2)}{dq}$. Тогда для функции $I^2(q)$ получается уравнение:

$$\frac{d(I^2)}{dq} - \frac{2\alpha}{L}I^2 = -\frac{2q}{LC}.$$

Такое же уравнение получается и из закона изменения энергии, примененного для контура.

От правой части уравнения можно избавиться, подобрав линейную функцию $\tilde{I}^2(q) = Aq + B$, обращающую уравнение в тождество:

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{2\alpha}{L}A &= -\frac{2}{LC} \\ A - \frac{2\alpha}{L}B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{I}^2(q) = \frac{q}{\alpha C} + \frac{L}{2\alpha^2 C}.$$

Теперь можно сделать замену переменной, записав:

$$I^2(q) = \tilde{I}^2(q) + F(q) = \frac{q}{\alpha C} + \frac{L}{2\alpha^2 C} + F(q),$$

и тогда уравнение примет вид $\dfrac{dF}{dq} - \dfrac{2\alpha}{L}F = 0$. Отсюда видно, что $F(q) = D\cdot\exp\left(\dfrac{2\alpha}{L}q\right)$, (где $D = \text{const}$) и зависимость $I^2(q)$ для первого «полупериода» колебаний имеет вид:

$$I^2(q) = \frac{q}{\alpha C} + \frac{L}{2\alpha^2 C} + D\cdot\exp\left(\frac{2\alpha}{L}q\right).$$

Если q_0 – начальный заряд конденсатора, то $I^2(q_0) = 0$. Поэтому $D = -\dfrac{1}{\alpha C}\left(\dfrac{L}{2\alpha} + q_0\right)\cdot\exp\left(-\dfrac{2\alpha}{L}q_0\right)$, и окончательно получаем:

$$I(q) = \sqrt{\frac{1}{\alpha C}\left\{\frac{L}{2\alpha} + q - \left(\frac{L}{2\alpha} + q_0\right)\cdot\exp\left(\frac{2\alpha}{L}(q - q_0)\right)\right\}}.$$

3.2. Ток в первый раз обратится в ноль в конце первого полупериода колебаний, когда заряд конденсатора сменит полярность и станет равен $q_1 = -0{,}9q_0$. Следовательно, $I^2(-0{,}9q_0) = 0$, и из этого уравнения можно найти начальный заряд конденсатора. Удобно ввести переменную $z \equiv \frac{2\alpha}{L} q_0$, и тогда $1 - 0{,}9z - (1+z)e^{-1{,}9z} = 0 \Rightarrow e^{1{,}9z} = \frac{1+z}{1-0{,}9z}$. Это уравнение можно приближенно решить графически (в принципе это возможный путь). Лучше решать его численно (если у участников будет возможность воспользоваться Excel или программируемым калькулятором, то это довольно легко). Можно решить его и «вручную». Для этого нужно «прикинуть» по графику, что корень $z << 1$, и разложить правую и левую часть с точностью до поправок 4-й степени по z (так нужно – слагаемые нулевой и первой степени сокращаются):

$$\frac{(1{,}9)^2}{2} z^2 + \frac{(1{,}9)^3}{6} z^3 + \frac{(1{,}9)^4}{24} z^4 \approx 1{,}9 \cdot 0{,}9 z^2 + 1{,}9 \cdot (0{,}9)^2 z^3 + 1{,}9 \cdot (0{,}9)^3 z^4 .$$

Это дает квадратное уравнение для z, положительный корень которого $z \approx 0{,}17$, и точность этого результата порядка $z^2 < 3\%$, то есть требуемая точность достигнута (если использовать разложение до z^3, то получается линейное уравнение, но при этом точность результата порядка z, и этого может не хватить; в самом деле, в этом приближении $z \approx 0{,}24$, что отклоняется от правильного ответа явно больше чем на 10%). Численное решение с помощью Excel дает $z \approx 0{,}1665 \pm 0{,}0001$.

Начальная энергия конденсатора $E_0 = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{L^2}{8\alpha^2 C} z^2$. К тому моменту времени, когда заряд конденсатора впервые обращается в ноль, ток в катушке достигает максимума. Вместе с ним максимума достигает энергия поля в катушке, равная

$$E_L(0) = \frac{LI^2(0)}{2} = \frac{L}{2\alpha C}\left\{\frac{L}{2\alpha} - \left(\frac{L}{2\alpha} + q_0\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\alpha}{L} q_0\right)\right\} = 2E_0 \frac{1-(1+z)e^{-z}}{z^2} .$$

Ясно, что выделившееся в нелинейном резисторе количество теплоты (оно только в нем и выделяется) $Q_1 = E_0 - E_L(0)$, и поэтому $\frac{Q_1}{E_0} = 1 - 2\frac{1-(1+z)e^{-z}}{z^2} \approx 0{,}1044$) для $z \approx 0{,}1665$, для $z \approx 0{,}17$ получится $\frac{Q_1}{E_0} \approx 0{,}1064$). Итак, к этому моменту тепловые потери составляют примерно (10-11)% от начальной энергии.

3.3. Потери энергии на всем первом «полупериоде» легко найти по убыванию заряда конденсатора: $Q_1' = \frac{q_0^2}{2C} - \frac{(-0{,}9q_0)^2}{2C} = 0{,}19E_0$, то есть $\frac{Q_1'}{E_0} = 19\%$.

3.4. Во второй раз заряд конденсатора обратится в ноль уже на следующем «полупериоде», когда ток поменяет направление. Для второго полупериода решение строится «заново», но совершенно аналогично – достаточно заменить модуль начального заряда конденсатора на $0{,}9q_0$. Количество теплоты, потерянное при изменении заряда конденсатора от $q_1 = -0{,}9q_0$ до второго обращения заряда в ноль находится с учетом того, что

$$E_L'(0) = \frac{LI'^2(0)}{2} = \frac{L}{2\alpha C}\left\{\frac{L}{2\alpha} - \left(\frac{L}{2\alpha} + |q_1|\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\alpha}{L} |q_1|\right)\right\} = 2E_0 \frac{1-(1+0{,}9z)e^{-0{,}9z}}{z^2} .$$

Значит, $\frac{Q_2}{E_0} = 1 - 2\frac{1-(1+0{,}9z)e^{-0{,}9z}}{z^2} \approx 0{,}2665 \approx 27\%$.